

# 4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

## Bimaticové hry

MIROSLAV RADA

Vysoká škola ekonomická v Praze

5. března 2020

# Konečné hry 2 hráčů – bimaticové hry

*Bimaticová hra* je hra v normálním tvaru  $H = (N, S, V)$  zadaná

- seznamem hráčů  $N := \{1, 2\}$ ,
- seznamem prostorů strategií –  
 $S := (X_1 = \{1, \dots, m_1\}, X_2 = \{1, \dots, m_2\})$  a
- seznamem výplatních funkcí  
 $V := (f_1(x_1, x_2) = a_{x_1x_2}, f_2(x_1, x_2) = b_{x_1x_2})$ , kde
  - $A, B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$  jsou zadané výplatní matice, technicky se dá hra plně popsat právě těmito maticemi.

Zajímá nás:

- jak vypadají NE v ryzech a smíšených strategiích,
- jak by se měli hráči chovat, pokud bychom dovolili kooperaci
  - s přenosnou výhrou,
  - s nepřenosnou výhrou.

## Pro připomenutí:

- Nashovo Ekvilibrium (NE) je (speciálně ve hře dvou hráčů) taková dvojice strategií  $(x^*, y^*) \in X_1 \times X_2$ , že pro všechna  $x \in X_1$  a  $y \in X_2$  platí:

$$a_{xy^*} \leq a_{x^*y^*}, \quad b_{x^*y} \leq b_{x^*y^*}. \quad (1)$$

- Hry  $(H, S, (f_1, f_2))$  a  $(H, S, (f_1 + k_1, f_2 + k_2))$  mají stejná NE pro konstanty  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ , takovým hrám říkáme *strategicky ekvivalentní*.
- U konečných her lze NE v *ryzích strategiích* nalézt tak, že se naleznou dvojice strategií vyhovující nerovnostem (1) zvlášť:
  - pro každé  $y^*$  se najde (množina)  $x^*$  vyhovující  $a_{xy^*} \leq a_{x^*y^*}$ ,
  - pro každé  $x^*$  se najde (množina)  $y^*$  vyhovující  $b_{x^*y} \leq b_{x^*y^*}$ ,
  - NE jsou takové dvojice, strategií, které v předchozích krocích vyhovovaly oběma nerovnostem.

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 27 & 36 & 42 \\ 25 & 40 & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ 27, 15 & 36, 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & 40, 12 & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & 42 \\ 25 & 40 & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & 40, 12 & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & 42 \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & \mathbf{20} \\ \overline{27} & 36 & \mathbf{42} \\ 25 & \overline{40} & \mathbf{35} \\ 2 & 2 & \mathbf{2} \\ 22 & 16 & \mathbf{17} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & 20, 12 & \mathbf{20, 10} \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \mathbf{42, 10} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & \mathbf{35, 5} \\ 2, 30 & 2, 0 & \mathbf{2, 10} \\ 22, 30 & 16, 6 & \mathbf{17, 5} \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & \underline{10} \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} \underline{20, 0} & \underline{20, 12} & \underline{20, 10} \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \overline{42, 10} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & \underline{6} & \underline{10} \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \underline{27, 15} & \underline{36, 6} & \underline{42, 10} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & \color{red}{12} & \color{red}{5} \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{\color{red}{25, 15}} & \underline{\color{red}{40, 12}} & \color{red}{35, 5} \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & \underline{10} \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ \underline{2, 30} & 2, 0 & \underline{2, 10} \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ \underline{2, 30} & 2, 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \underline{27} & 36 & \underline{42} \\ 25 & \underline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \underline{27, 15} & 36, 6 & \underline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \underline{40, 12} & 35, 5 \\ \underline{2, 30} & 2, 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

# Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Pro uživatele může být přehledné hru zanést do matice *dvojic*  $(a_{ij}, b_{i,j})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36, 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35, 5 \\ \underline{2, 30} & 2, 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

Pro následné počítačové zpracování je to spíše překážka.

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & 16, 14 & 16, 10 \\ \overline{27, 13} & 33, 7 & 40, 10 \\ 23, 13 & 36, 14 & 31, 5 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \mathbf{16, 14} & 16, 10 \\ \overline{27, 13} & \mathbf{33, 7} & 40, 10 \\ 23, 13 & \overline{\mathbf{36, 14}} & 31, 5 \\ 4, 26 & \mathbf{4, 0} & 4, 10 \\ 24, 26 & \mathbf{17, 7} & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & 16, 14 & \mathbf{16, 10} \\ \overline{27, 13} & 33, 7 & \mathbf{40, 10} \\ 23, 13 & \overline{36, 14} & \mathbf{31, 5} \\ 4, 26 & 4, 0 & \mathbf{4, 10} \\ 24, 26 & 17, 7 & \mathbf{19, 5} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} \underline{16, 0} & \underline{16, 14} & \underline{16, 10} \\ \overline{27, 13} & 33, 7 & \overline{40, 10} \\ 23, 13 & \overline{36, 14} & 31, 5 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & \mathbf{33, 7} & \mathbf{40, 10} \\ 23, 13 & \overline{36, 14} & 31, 5 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ \mathbf{23, 13} & \mathbf{\underline{36, 14}} & \mathbf{31, 5} \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & \underline{17, 7} & \underline{19, 5} \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \overline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \mathbf{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & \mathbf{23, 7} & 30, 12 \\ 20, 8 & \underline{\mathbf{28, 14}} & 22, 6 \\ 4, 26 & \mathbf{4, 0} & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & \mathbf{19, 7} & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & \underline{6, 12} \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & \underline{22, 6} \\ 4, 26 & 4, 0 & \underline{4, 10} \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & \underline{20, 6} \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ \color{red}{22, 8} & \color{red}{23, 7} & \color{red}{\underline{30, 12}} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ \underline{20, 8} & \underline{28, 14} & \underline{22, 6} \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & 40, 10 \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & 60, 14 & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & 84, 12 \\ \underline{47, 35} & 82, 14 & 76, 6 \\ \underline{4, 70} & 4, 0 & 4, 12 \\ \underline{26, 70} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ 49, 35 & \underline{77, 7} & 84, 12 \\ 47, 35 & \underline{82, 14} & 76, 6 \\ 4, 70 & \underline{4, 0} & 4, 12 \\ 26, 70 & \underline{19, 7} & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60, 0} & 60, 14 & \underline{60, 12} \\ 49, 35 & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ 47, 35 & \overline{82, 14} & \underline{76, 6} \\ 4, 70 & 4, 0 & \underline{4, 12} \\ 26, 70 & 19, 7 & \underline{20, 6} \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \overline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60, 0} & \underline{60, 14} & \overline{60, 12} \\ 49, 35 & 77, 7 & \overline{84, 12} \\ 47, 35 & \overline{82, 14} & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & \underline{77, 7} & \underline{84, 12} \\ 47, 35 & \overline{82, 14} & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ \underline{47, 35} & \underline{82, 14} & \underline{76, 6} \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ \underline{47, 35} & \underline{82, 14} & 76, 6 \\ \underline{4, 70} & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ \underline{47, 35} & \underline{82, 14} & 76, 6 \\ \underline{4, 70} & 4, 0 & 4, 12 \\ \underline{26, 70} & 19, 7 & \underline{20, 6} \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ \underline{47, 35} & \underline{82, 14} & 76, 6 \\ \underline{4, 70} & 4, 0 & 4, 12 \\ \underline{26, 70} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

# Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

- hra má jediné NE,
- hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
- hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava těch NE, že jsou dominována ostatní řešení,
- hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
- hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

# Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

- hra má jediné NE,
- hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
- hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava těch NE, že jsou dominována ostatní řešení,
- hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
- hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

# Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

- hra má jediné NE,
- hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
- hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava těch NE, že jsou dominována ostatní řešení,
- hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
- hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

# Smíšené rozšíření bimaticové hry

Připomeňme:

- smíšené strategie se zavádí proto, že ryzí strategie neposkytují v určitých situacích návod k jednání,
- každá konečná hra má alespoň jedno NE ve smíšeném rozšíření.
  - Otázka: Je to však zde dostačující?

*Smíšené rozšíření bimaticové hry* je hra v normálním tvaru

$H = ((1, 2), (X_1^s, X_2^s), (f_1^s, f_2^s))$ , kde

- prostory strategií hráče 1 pak má podobu  $X_1^s = \{(x_1^1, \dots, x_1^{m_1})^\top : \sum_{j \in X_1} x_1^j = 1, x_1 \geq 0\}$ ,  $X_2^s$  analogicky, prvky  $X_1^s$  budeme značit  $x^s$ , prvky  $X_2^s$  budeme značit  $y^s$
- výplatní funkce jsou  $f_1^s(x^s, y^s) = x^{s\top} A y^s$  a  $f_2^s(x^s, y^s) = x^{s\top} B y^s$ .

# NE ve smíšeném rozšíření bimaticové hry

Z definičních nerovností NE a tvaru prostorů strategií lze odvodit následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \in X_1^s, x_2 \in X_2^s} F(x_1, x_2) &= x_1^\top (A + B)x_2 - \alpha - \beta \\ Ax_2 &\leq \mathbf{1}\alpha \\ B^\top x_1 &\leq \mathbf{1}\beta \end{aligned} \tag{2}$$

## Věta

*Nechť je  $(x_1, x_2)$  optimální řešení úlohy (2).*

*Pak  $F(p, q) = 0$  a  $(x_1, x_2)$  jsou NE bimaticové hry zadané výplatními maticemi  $A$  a  $B$ .*

## Alternativní zápis úlohy (2)

$$\begin{aligned} \max_{p \in \mathbb{R}^{m_1}, q \in \mathbb{R}^{m_2}} F(p, q) &= \sum_{i \in X_1, j \in X_2} p_i (a_{ij} + b_{ij}) q_j - \sum_{i \in X_1} p_i - \sum_{j \in X_2} q_j \\ \sum_{j \in X_2} a_{ij} q_j &\leq 1, \quad \forall i \in X_1 \\ \sum_{i \in X_1} b_{ij} p_i &\leq 1, \quad \forall j \in X_2 \\ p_i, q_j &\geq 0, \quad i \in X_1, j \in X_2 \end{aligned}$$

# Poznámky a problémy spojené s NE ve smíšených strategiích

- Úloha (2) je úlohou nekonvexní optimalizace (kvadratická forma  $p^T(A + B)q$  je zcela obecná):
  - solvery mohou skončit v lokálním maximu (které neodpovídá NE),
  - globálních maxim může být více,
  - najít všechna maxima je obecně výpočetně neúnosné.
- V solvech lze různá globální maxima nalézt spouštěním optimalizace z různých výchozích řešení.
- Bimaticová hra, která má NE v ryzích strategiích, může mít (dominující) NE ve smíšených strategiích.

# Příklad

Bimaticová hra pro dva hráče je dána následující maticí dvojic:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

- 1 Nalezněte alespoň jedno Nashovo ekvilibrium v jejím smíšeném rozšíření.
- 2 Jaké budou rovnovážné strategie jednotlivých hráčů? Jaké budou jejich výplatní funkce?

# Jak na kooperaci

Připustíme spolupráci. Co má být řešením:

- závazná „smlouva“ o použití strategií a dělení výhry,
- ...nebo nekooperace.

Lze rozlišit kooperaci :

- s přenosnou výhrou (výhru koalice lze přerozdělit), a
- s nepřenosnou výhrou – každý vyhraje pouze a jen hodnotu své výplatní funkce.

Hledá se odpověď na otázky:

- 1 kdy má smysl kooperovat,
- 2 jaké strategie případně dohodnout (triviální u přenosné výhry),
- 3 jak rozdělit výhru (odpadá u nepřenosné výhry).

# Kdy se vyplatí kooperovat – přenosná výhra

Zřejmě – kooperace je výhodná, pokud si hráči polepší oproti stavu, kdy nekooperují.

- Je-li  $N$  množina hráčů, zavedeme tzv. *charakteristickou funkci*, která každé koalici  $K$  (podmnožině  $N$ ) přiřadí celkovou výhru, kterou si daná koalice zajistí tím, že bude spolupracovat, tedy
- $v(K)$  je výhra koalice  $K$ .

Aby kooperace byla výhodná, zřejmě musí v bimaticové hře platit  $v(\{1, 2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$ .

- Zřejmě  $v(\{1, 2\}) = \max_{x,y} a_{xy} + b_{xy}$  (snadné).
- Problém: jak zjistit  $v(\{1\})$  a  $v(\{2\})$ ?

# Stanovení $v(\{i\})$

Je třeba vyřešit otázku, jaká bude výhra hráčů, pokud by se na kooperaci nedohodli. Možnosti:

- maximalizace jisté (zaručené) výhry (*minimax*)
  - odůvodnění: hráči se připravují na nejhorší scénář; navzájem si hrozí poškozováním
  - $v(\{1\}) = \max_{x \in X_1} \min_{y \in X_2} a_{xy}$
  - $v(\{2\}) = \max_{y \in X_2} \min_{x \in X_1} b_{xy}$
- použití výher při nekooperaci (*kompetitivnost*) – problematické kvůli nejednoznačnosti
- hra proti náhodnému mechanismu (*nedostatečná evidence*)
  - odůvodnění: situace je natolik nepřehledná, že se dá očekávat, že protihráč se bude chovat jako náhodný mechanismus
  - $v(\{1\}) = \max_{x \in X_1} \frac{1}{m_2} \sum_{y \in X_2} a_{ij}$
  - $v(\{2\}) = \max_{y \in X_2} \frac{1}{m_1} \sum_{x \in X_1} b_{ij}$

# Dělení výhry

Známe-li  $v(\{1, 2\})$ ,  $v(\{1\})$  i  $v(\{2\})$ , víme, že nutnou podmínkou pro kooperaci je  $v(\{1, 2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$ . Výhru  $v(\{1, 2\})$  si hráči v případě kooperace dělí.

Označme  $a_1$  a  $a_2$  podíly hráčů na výhře koalice  $\{1, 2\}$ . Hráči zřejmě budou ochotni dohodnout nějaké „spravedlivé“ dělení splňující:

$$\begin{aligned}v(\{1, 2\}) &= a_1 + a_2 \\v(\{1\}) &\leq a_1 \\v(\{2\}) &\leq a_2\end{aligned}\tag{3}$$

Jednotlivá dělení splňující (3) se nazývají *imputace*, množina všech imputací se nazývá *jádro hry*.

# Výběr spravedlivé imputace z jádra

„Spravedlivé“ je to, s čím hráči souhlasí. Nabízí se:

- použít těžiště jádra – rozdělit efekt kooperace napůl
  - odůvodnění: oba hráči se na vzniku koalice podílejí stejnou měrou
    - $a_1 = v(\{1\}) + 0.5(v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
    - $a_2 = v(\{2\}) + 0.5(v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
  - $a_1 : a_2 = v(\{1\}) : v(\{2\})$
  - $a_1 : a_2 = (v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) : (v(\{1, 2\}) - v(\{1\}))$

Patří dělení získaná pomocí dvou posledně jmenovaných možností jistě do jádra hry?

# Jak na nepřenosičnou výhru

## Zadání:

- Máme zadanou hru  $((1, 2), (X, Y), (f_1(x, y) = a_{xy}, f_2(x, y) = b_{xy}))$

## Hledáme odpověď na otázky:

- kdy má smysl kooperovat, a
- jaké strategie dohodnout (explicitně se omezíme na prostor ryzích strategií, tedy  $X = \{1, \dots, m_1\}$  a  $Y = \{1, \dots, m_2\}$ ).

## Postup:

- Najdeme *dosažitelná rozdělení*, z nich vezmeme *nedominovaná*
- Existuje-li alespoň jedno dosažitelné rozdělení, vybereme *nejlepší*

# Dosažitelná rozdělení

## Dosažitelná rozdělení formálně.

*Dosažitelné rozdělení* je taková dvojice  $(p_1, p_2)$ , že  $(p_1, p_2) \geq (v(\{1\}), v(\{2\}))$  a zároveň platí, že existuje takové  $x \in X, y \in Y$ , že  $a_{xy} = p_1, b_{xy} = p_2$ .

Množinu všech dosažitelných rozdělení budeme značit  $D$ .

**Neformálně:** dosažitelná rozdělení odpovídají těm dvojicím strategií, pro které jsou výplaty obou hráčů alespoň takové, jako jsou zaručené výhry.

## Nedominovaná dosažitelná rozdělení formálně.

Dosažitelné rozdělení  $(p_1, p_2)$  je *nedominované*, neexistuje-li dosažitelné rozdělení  $(q_1, q_2)$  takové, že  $(q_1, q_2) \gneq (p_1, p_2)$ .

Množinu všech značme  $D_n$ .

# Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud  $D \neq \emptyset$ . Navíc, pak platí i  $D_n \neq \emptyset$ . Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$ . Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na toto jediné nedominované dosažitelné rozdělení.
- $|D_n| > 1$ . Je nutné vybrat „nejlepší“ nedominované rozdělení.

# Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud  $D \neq \emptyset$ . Navíc, pak platí i  $D_n \neq \emptyset$ . Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$ . Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na toto jediné nedominované dosažitelné rozdělení.
- $|D_n| > 1$ . Je nutné vybrat „nejlepší“ nedominované rozdělení.
  - Problém: co je nejlepší?
  - Výsledkem jistě musí být nějaké nedominované dosažitelné rozdělení.

# Idea průměrného nedominovaného dělení

- Řekněme, že jsou všechna nedominovaná dělení možná.
- Spočtíme střední výplatu přes  $D_n$ :

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \sum_{(p_1, p_2) \in D_n} \frac{(p_1, p_2)}{|D_n|}$$

- Nyní můžeme za nejlepší dělení  $(p'_1, p'_2)$  prohlásit to, které je „nejblíže“  $(\bar{p}_1, \bar{p}_2)$  v nějaké metrice  $d$ :

$$(p'_1, p'_2) = \arg \min_{(p_1, p_2) \in D_n} d((p_1, p_2), (\bar{p}_1, \bar{p}_2)),$$

pro euklidovskou metriku tedy

$$(p'_1, p'_2) = \arg \min_{(p_1, p_2) \in D_n} \sqrt{(p_1 - \bar{p}_1)^2 + (p_2 - \bar{p}_2)^2}.$$

# Idea založené na přírůstku k zaručeným výhrám

- Vezměme za nejlepší nedominované dosažitelné dělení to, které má největší možný menší z přírůstků k zaručeným výhrám:

$$(p'_1, p'_2) = \arg \max_{(p_1, p_2) \in D_n} \min\{p_1 - v(\{1\}), p_2 - v(\{2\})\}.$$

- Různé jiné způsoby?

# Příklad

Použijme výše uvedené postupy na bimaticovou hru určenou dvoumaticí

$$C = \begin{pmatrix} 4, 5 & 8, 4 & 6, 7 \\ 1, 1 & 0, 0 & 9, 3 \\ 3, 2 & 6, 1 & 7, 2 \end{pmatrix}.$$