

# Teorie her

Úvodní cvičení, organizace, různé hry

---

Miroslav Rada

- Literatura
  - Dlouhý, Fiala – Teorie ekonomických a politických her (2015)
  - Mañas – Teorie her a její aplikace
  - Turnovec, Chobot – Teória hier a rozhodovania
  - pěkné materiály Jana Zouhara (anglicky)
  - webové materiály (wikipedia apod.)
- Podmínky zakončení
  - až 50 bodů ze cvičení ...
    - řádné úkoly v hodnotě 50 bodů
    - možno nahrazovat bonusovými úkoly, podle situace
  - až 50 bodů ze zkoušky – zabezpečuje přednášející
- Kontakt
  - `miroslav.rada@vse.cz`
  - NB 130, linka 5159
  - KH: aktuální info viz InSIS

# Hra 1: stánky se zmrzlinou

## Situace:

- na pláži dlouhé 1 km si konkurují dva zmrzlináři
- poptávka po zmrzlině je nezávislá na vzdálenosti ke stánku
- každý zákazník jde ke stánku, který má blíže
- jsou-li oba zmrzlináři stejně daleko, vybírá zákazník náhodně
- pláž má tvar úsečky
- cílem každého z hráčů je maximalizovat svůj tržní podíl

## Cíl:

- najít pozici **optimální** pozici zmrzlinářů

# Hra 1: stánky se zmrzlinou

## Situace:

- na pláži dlouhé 1 km si konkurují dva zmrzlináři
- poptávka po zmrzlině je nezávislá na vzdálenosti ke stánku
- každý zákazník jde ke stánku, který má blíže
- jsou-li oba zmrzlináři stejně daleko, vybírá zákazník náhodně
- pláž má tvar úsečky
- cílem každého z hráčů je maximalizovat svůj tržní podíl

## Cíl:

- najít pozici **optimální** pozici zmrzlinářů

## Výsledek:

- oba zmrzlináři uprostřed pláže

- Situace:
  - hráči se účastní aukce o 10 (kladných) bodů ze cvičení
  - draží se pomocí záporných bodů ze cvičení
  - minimální nabídka je 2 body
  - hráči vyvolávají své nabídky, minimální příhoz je 0.5 bodu
  - 10 bodů náleží nejvyšší nabídce

## Hra 2: aukce o 10 bodů

- Situace:
  - hráči se účastní aukce o 10 (kladných) bodů ze cvičení
  - draží se pomocí záporných bodů ze cvičení
  - minimální nabídka je 2 body
  - hráči vyvolávají své nabídky, minimální příhoz je 0.5 bodu
  - 10 bodů náleží nejvyšší nabídce
  
- hráč s druhou nejvyšší nabídkou body ztrácí také!

## Příklad

4 osoby si objednávají v restauraci. Pokud:

- každý si platí sám  $\Rightarrow$  rozhodovací problém
- každý platí čtvrtinu účtu  $\Rightarrow$  hra

- **Hra**

- více rozhodovatelů současně
- individuální výsledek může být závislý na akcích ostatních

- **Teorie her**

- disciplína studující chování rozhodovatelů v konfliktních situacích pomocí matematického modelování

# Hra 3: dvě třetiny průměru

## Situace:

- každý hráč tipuje číslo z intervalu  $[0, 100]$
- vyhrává každý hráč, který je nejbližší  $\frac{2}{3}$  průměru všech tipovaných čísel

## Preference (lexikograficky):

- být nejbližší  $\frac{2}{3}$  průměru,
- minimalizovat počet výherců.

## Cíl:

- co je optimální tip?
- pojďme hru hrát na <http://hry.polyedr.cz/prumer>

# Hra 4: Piráti

## Situace:

- $n$  racionálních pirátů najde poklad sestávající z  $m$  mincí
- dělení probíhá následovně:
  - od nejstaršího po nejmladšího se vznášejí návrhy na rozdělení,
  - o každém návrhu se ihned hlasuje, pokud je některý přijat, další návrhy se nevznášejí,
  - nutná nadpoloviční většina hlasů,
  - pokud návrh není přijat, navrhuující pirát je eliminován.

## Preference (lexikograficky):

- maximalizace vlastního zisku,
- zachování vlastního života,
- maximalizace uzmutých cizích životů, a
- maximalizace spokojenosti starších pirátů (20,0,80,0,0 lepší než 20,0,0,0,80).

## Cíl:

- optimální návrhy a chování při hlasování pro  $n = 5$  a  $m = 100$ .
- řešení možno ověřit na <http://hry.polyedr.cz/pirati>

## Hráči

- počet hráčů: 2 hráči / více hráčů
- možnosti kooperace: žádná / omezená / volná tvorba koalic
- přítomnost náhodného mechanismu
- informace: úplná / neúplná

## Strategie

- velikost prostoru strategií: konečný / nekonečný
- spojitost prostoru strategií: spojitý / nespojitý

## Výplatní funkce

- konstantní součet (antagonistická hra) / nekonstantní součet
- kooperace: přenosná / nepřenosná výhra

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in [n]$  je  $f_i : \quad \quad \quad \mapsto \mathbb{R}$ ,

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in [n]$  je  $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$ ,

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in [n]$  je  $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$ ,
  - $X := X_1 \times \dots \times X_n$ .

Trojice  $(N, X, f)$  je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru**

$$N = \{1, 2\},$$

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in [n]$  je  $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$ ,
  - $X := X_1 \times \dots \times X_n$ .

Trojice  $(N, X, f)$  je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru**

$$N = \{1, 2\}, X = \{[0, 1], [0, 1]\}, f = \{f_1, f_2\},$$

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in [n]$  je  $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$ ,
  - $X := X_1 \times \dots \times X_n$ .

Trojice  $(N, X, f)$  je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru**

$N = \{1, 2\}$ ,  $X = \{[0, 1], [0, 1]\}$ ,  $f = \{f_1, f_2\}$ ,

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)/2 & \text{pokud } x_1 \leq x_2, \\ 0.5 & \text{pokud } x_1 = x_2, \\ 1 - (x_1 + x_2)/2 & \text{jinak;} \end{cases}$$

$f_2$  analogicky.

# Hra v rozvinutém tvaru

- u hry v **normálním tvaru** se předpokládá, že rozhodnutí probíhají **simultánně**
- u hry v **rozvinutém tvaru** je rozhodování **sekvenční** (př. šachy, většina tahových her)
- obvyklou reprezentací je strom, kde každé větvení odpovídá jednomu rozhodnutí
- uzly – stavy, hrany – zvolené strategie
  
- pokud pozdější rozhodnutí nejsou ovlivňovány dřívejšími, lze řešit zpětnou indukci
- lze převést na hru v normálním tvaru
- uzly mohou být samy o sobě hrou se simultánním rozhodováním

# Hra ve tvaru charakteristické funkce

- pro kooperativní hry (s přenosnou výhrou)
- idea – zkoumat kooperaci formou hry normálním tvaru je výpočetně náročné, pojďme to usnadnit a říct, jaká bude výplata jednotlivých koalic

**Hra ve tvaru charakteristické funkce** je množina  $(N, \varphi : 2^N \mapsto \mathbb{R})$ .

- $N$  je množina hráčů,  $\varphi$  funkce, které každé podmnožině  $N$  přiřazuje výhru
- je možné klást otázky typu **Může koalice  $K \subseteq N$  vzhledem k velikosti své výplaty vzniknout?** nebo **Jak se v rámci koalice  $K$  má rozdělit zisk, pokud tato koalice vznikne?**

# Co považovat za řešení?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

## Nashovo equilibrium

**Nashovo equilibrium** je taková kombinace strategií  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ , že pro každého hráče, řekněme  $i$ -tého, platí, že pro všechna  $x_i \in X_i$  je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$  budeme značit  $(x_i, x_{-i}^*)$

Podle definice Nashova ekvilibria je  $x^*$  ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna  $i$  platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat  $x_i^*$  v závislosti na  $x_{-i}$ . Definujme tzv. **best-response funkci**  $i$ -tého hráče, značenou  $g_i$ . Zřejmě  $g_i : X_{-i} \rightarrow 2^{X_i}$ :

$$g_i(x_{-i}) := \{x_i \in X_i : f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_{-i})\}.$$

Zřejmě,  $x^*$  je Nashovo ekvilibrium, pokud  $x_i^* \in g_i(x_{-i}^*)$  pro všechna  $i \in N$ .

## Hra 5: kámen–nůžky–papír (KNP)

### Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

### Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

# Hra 5: kámen–nůžky–papír (KNP)

## Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

## Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

## Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**

## Hra 5: kámen–nůžky–papír (KNP)

### Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

### Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

### Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje

# Hra 5: kámen–nůžky–papír (KNP)

## Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

## Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

## Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje
- pokud chování je **pravděpodobnostní rozdělení nad symboly**, optimální chování existuje

## Hra 6: hra o nejvyšší číslo

### Situace:

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

### Cíl:

- má hra Nashovo ekvilibrium?

## Hra 6: hra o nejvyšší číslo

### Situace:

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

### Cíl:

- má hra Nashovo ekvilibrium?
- pokud ne, nepomohlo by změnit pojetí **chování**?

- Již víme, že u hry 2/3 průměru (Hra 3) je optimální strategie  $(0, \dots, 0)$ . Připouštěli jsme, že tipy hráčů mohou být reálná čísla z intervalu  $[0, 100]$ . Změní se něco, když se omezíme na celá nezáporná čísla? Poznamenejme, že optimální strategií rozumíme takovou kombinaci strategií, že žádný z hráčů nemá motivaci svou strategii změnit.
- Jak ovlivňuje počet hráčů optimální strategie ve hře 2/3 průměru? Jak je to v případě reálných tipů? A jak v případě celočíselných?

## Bonusové otázky k zamyšlení – II

Uvažujme znovu zmrzlináře (Hra 1). Řekněme, že nyní je poptávka po zmrzlině závislá na vzdálenosti k nejbližšímu stánku. Konkrétně, stojí-li zmrzlináři na pozicích  $x_1$  a  $x_2$ , je poptávka v bodě  $x$  rovna  $1 - 0.5 \min\{|x - x_1|, |x - x_2|\}$ . Stejně jako u hry 1 se poptávku realizuje u toho zmrzlináře, který stojí blíže.

- Jak se mají zmrzlináři postavit (tj. najděte ve hře Nashovo ekvilibrium, existuje-li), je-li cílem každého z nich maximalizovat poptávku, která se u něj realizuje? (Realizovanou poptávku měřme jako integrál poptávky v jednotlivých bodech.)
- Jak to bude pro 3 zmrzlináře?