

4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Volební hry

MIROSLAV RADA

29. října 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

Situace:

- Máme parlament o m křeslech, ve kterém je n politických stran s počty mandátů $a_1, \dots, a_n$.
- Pro přijetí návrhu v parlamentu je třeba k hlasů, kde $k > \alpha m$ pro nějaké $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Parametr α se nazývá *hlasovací pravidlo*.
- Platí (ne)rozumné předpoklady: členové stran hlasují jednotně, členové koalic hlasují jednotně, všechny koalice jsou stejně pravděpodobné.

Cíl:

- uvažovat situaci jako kooperativní hru a odhadnout sílu hráčů v konfliktu
- charakteristická funkce koalice K bude zřejmě

$$v(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{i \in K} a_i > \alpha m \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad – volební hry

Zadání: Mějme politické strany s počty mandátů 52, 34, 69, 28, 47, 43. Spočtěme, jak se mění

- Shapley-Shubikův index síly (Shapleyova hodnota), a
- Banzhafův index síly (Bonus: jde o shapleyovu hodnotu s jednotkovými váhami?)

v závislosti na hlasovacím pravidle α .

Indexy síly:

- $S_i = \{K \subseteq N : v(K) = 1 \wedge v(K \setminus \{i\}) = 0\}$ pro všechna $i \in N$, $e_i = |S_i|$.
- Shapley-Shubik:

$$s_i = \sum_{K \subseteq S_i} \frac{(|K| - 1)!(n - |K|)!}{n!},$$

- Banzhaf:

$$\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{j \in N} e_j}$$

Situace. Zmrzlinář prodává balení zmrzliny. Nabízí následující možnosti:

- malé balení 300 ml za 60 peněz,
- standardní balení 500 ml za 80 peněz a
- maxi balení 700 ml za 100 peněz.

Sejde se n dětí, které disponují $p_1, \dots, p_n$ penězi. Každé dítě chce maximalizovat množství zmrzliny, které sní.

Otázky.

- Jak se budou děti chovat, mohou-li kooperovat? Jak si spravedlivě rozdělit zmrzlinu?
- Vybere-li od dětí peníze učitel a koupí maximální množství zmrzliny, jak by ji měl rozdělit?

Řešme pro $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (30, 50, 55, 70, 80)$ peněz.

Koalice a koaliční struktura

Mějme kooperativní hru n hráčů. Množina všech hráčů se značí N .

Koalice je jakákoli neprázdná podmnožina K množiny N .

- Koalice mohou být i jednoprvkové.
- (Z technických důvodů je někdy výhodné připouštět i prázdné koalice, na to vždy upozorníme.)
- Počet možných koalic je zřejmě $2^n - 1$.
- Množina všech koalic se bude značit 2^N .

Koaliční struktura je množina koalic.

Příklad

Mějme hru s $n = 3$. Možné koalice zřejmě jsou $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.

Možné koaliční struktury jsou např. $\{\{1\}\}, \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$ atd.

Dělení her podle přípustnosti koaličních struktur

- Hry s volnou nedisjunktní koaliční strukturou.
 - přípustné jsou i takové struktury, kde může být hráč ve více koaliciích
 - počet takových koaličních struktur je $2^{2^n-1} - 1$
- Hry s (volnou) disjunktní koaliční strukturou.
 - každý hráč musí být právě v jedné koalici
 - počet koaličních struktur?
- Hry s omezenou koaliční strukturou.
 - koaliční struktury musí splňovat nějaké další požadavky.

Příklad – omezená koaliční struktura

Mějme rozumně se chovající politickou scénu se stranami Právce, Střed a Levice, kde názvy stran v sobě nesou informaci o ideologickém založení:

Rozumná hra s omezenou koaliční strukturou by patrně připustila jen koalice {Právce, Střed} a {Levice, Střed} (a jednoprvkové)

Dělení her podle přípustnosti koaličních struktur

- Hry s volnou nedisjunktní koaliční strukturou.
 - přípustné jsou i takové struktury, kde může být hráč ve více koaliciích
 - počet takových koaličních struktur je $2^{2^n-1} - 1$
- Hry s (volnou) disjunktní koaliční strukturou.
 - každý hráč musí být právě v jedné koalici
 - počet koaličních struktur?
- Hry s omezenou koaliční strukturou.
 - koaliční struktury musí splňovat nějaké další požadavky.

Příklad – omezená koaliční struktura

Mějme rozumně se chovající politickou scénu se stranami Právce, Střed a Levice, kde názvy stran v sobě nesou informaci o ideologickém založení:

Rozumná hra s omezenou koaliční strukturou by patrně připustila jen koalice {Právce, Střed} a {Levice, Střed} (a jednoprvkové)

Dále jen hry s volnou disjunktní koaliční strukturou.

Charakteristická funkce je funkce $v : 2^N \mapsto \mathbb{R}$.

- Přiřazuje hodnotu (*sílu*) každé koalici.
- Hodnota $v(K)$ vyjadřuje, jaká je (zhruba) výhra koalice K , pokud vznikne.

Vznikne-li ve hře koaliční struktura $L = \{K_1, \dots, K_l\}$, pak vektor $(a_1, \dots, a_n)$ budeme nazývat *rozdělením*, pokud pro $K_i \in L$ bude platit $\sum_{j \in K_i} a_j = v(K_i)$.

- Každý hráč zřejmě usiluje o to, aby získal co nejvíce.
- Jsou-li hráči i a j členy koalice K , chtějí z $v(K)$ získat co nejvíce – jejich zájmy jsou protichůdné.

Pro koalici K se zkoumá, zda existuje řešení soustavy

$$\begin{aligned}\sum_{i \in K} a_i &= v(K) \\ \sum_{i \in Q} a_i &\geq v(Q) \quad Q \subseteq K\end{aligned}$$

- Pokud ano, je K skupinově stabilní.
- Nemusí existovat. Je-li prázdné, koalice nevznikne.
- Nedává jednoznačný návod k jednání.
- Nejednoznačnost lze odstranit – např. lze použít těžiště jádra – výpočetně složité.

- Mějme koalici N a rozdělení zisku a .
- Jednotlivé koalice mohou být více či méně nespokojené rozdělením a .
- Pro koalici $K \subseteq N$ definujme $d(a, K) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$
- Zřejmě: pokud $d(a, K) > 0$, může K rozdělení a vetovat (požaduje-li se skupinová stabilita)

Jedna z možností práce s námitkami:

- Při diskuzi o a bude nejvíce namítat koalice K s největším $d(a, K)$.
- Rozdělení x je přijatelnější než rozdělení y , pokud $\max_{K \subseteq N} d(x, K) < \max_{K \subseteq N} d(y, K)$.
- Definujme $T(a) = (T_1(a), \dots, T_{2^{|S|-1}}(a))$, kde jednotlivé složky jsou sestupně seřazené námitky proti rozdělení a .

Vektor $T(x)$ je *lexikograficky menší* než $T(y)$, pokud první nenulová složka vektoru $T(x) - T(y)$ je záporná (první rozdílná složka je menší u $T(x)$).

- Předpoklad: hráči se snaží o individuálně a kolektivně racionální řešení.
- *N-jádro*: takové rozdělení a , že $T(a)$ je lexikograficky nejmenší.

Výhody: Lze najít pomocí LP. Je jednoznačné. Vždy existuje.

Nevýhody: Nemusí být skupinově stabilní.

Budeme řešit na cvičení.

Idea:

- koalice N se může na základě pořadí příchodů hráčů vytvořit $n!$ způsoby.
- přínos hráče i ke koalici K je $p(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$.
- koalice $K \setminus \{i\}$ může vzniknout $(|K| - 1)!$ způsoby, zbylí hráči se do koalice K mohou přidat $(n - |K|)!$ způsoby
- pravděpodobnost, že hráč i bude mít přínos $p(i, K)$ je $(n - |K|)!(|K| - 1)!/n!$.

Shapleyova hodnota: střední hodnota přínosů hráče i přes všechny způsoby vytvoření koalice N :

$$s(i) = \sum_{K \subseteq N, i \in K} \frac{(n - |K|)! (|K| - 1)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus \{i\}))$$