

4EK421 – zadání úkolů – sada 1

Obsah

A	Instrukce k odevzdání úkolů	2
B	Hry z úvodního cvičení	3
	Zmrzlináři	3
	2/3 průměru	3
C	Hry s konstantním součtem	4
	Maticové hry	4
	Hra o nejvyšší číslo	5
	Hra o dělitelné zakázky	5
D	Bimaticové hry	6
	Bimaticová hra při nekooperaci	6
	Kooperace v bimaticové hře	8
E	Oligopol	9
F	Hry v rozvinutém tvaru	11
G	Hlasovací hry	14
H	Bayesovská hra	15
I	Rozhodování při neurčitosti	16

A Instrukce k odevzdání úkolů

Odevzdání.

- Úkoly lze odevzdat třikrát během semestru. V InSIS jsou za tímto účelem vytvořeny tři odevzdávací.
- Termíny odevzdání jsou stanovené daty uzavření odevzdávání.
- Do každé odevzdávací lze odevzdat libovolný počet úloh v libovolném pořadí.
- Každou úlohu lze odevzdat pouze jednou, nebude-li řešení emailem nebo osobně vráceno k doplnění nebo přepracování.

Forma.

- Úlohy odevzdávejte v PDF v podobě, která umožní sledování postupu řešení. Za předpokladu čitelnosti může být odevzdán i naskenovaný nebo vyfocený dokument. Maximální velikost stránky je PDF je A4.
- Další formáty (XLS, R skript, Python) jsou pouze podpůrné a musí být komentovány v PDF verzi.

Obsah a zpracování.

- Součástí odevzdaných úkolů musí být i komentář, zejména by mělo být patrné, jak bylo řešení dosaženo, proč byly provedeny kroky, které byly provedeny, apod. K tomu je nejvhodnější formou ucelený text, případně doplněný o další materiály.
- Při zpracování úkolů můžete spolupracovat, ať již s kolegy, se mnou, s jazykovými modely. Výsledný text nicméně musí být Váš. Zejména bych nerad trávil čas čtením a komentováním textů generovaných AI. Nejste-li si jisti, zeptejte se.

Bodování. Některé úlohy považuji za jednodušší než jiné. Celkový počet bodů za úlohy, které považuji za jednodušší, převyšuje 50. Jednodušší úlohy jsou označeny srdíčkem ♥. Ostatní úlohy vyžadují nějaký nápad a budu u nich požadovat preciznější řešení.

Personalizace zadání. Žádá-li zadání úkolu, abyste si jej personalizovali podle data narození, lze použít vlastní datum narození nebo datum zvolit náhodně samplováním z *rozumné* distribuce. Příklad rozumné distribuce: nezávislá na distribucích ostatních studentů, pokrývá několik let okolo skutečného data narození. Máte-li pochybnosti o tom, zda je Vaše distribuce rozumná, nejspíš rozumná není.

B Hry z úvodního cvičení

Zmrzlináři

Úloha B.1: Zmrzlináři s konstantní poptávkou. [max. 5 bodů]

Vizte **slidy** z prvního cvičení, konkrétně první odrážku na slide 16.

Případ tří zmrzlinářů s konstantní poptávkou jsme řešili na cvičení – tam ekvilibrium neexistovalo. Existuje ekvilibrium, pokud zmrzlináři budou 4? Jak je to v případě 5 zmrzlinářů? A co když je zmrzlinářů 6, nebo obecněji, n ? A je ekvilibrium unikátní, nebo jich existuje více?

Jakákoli odpověď musí být řádně zdůvodněna. Plný počet bodů lze získat za charakterizaci ekviliбриí ve všech případech.

Úloha B.2: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou jako hra v normálním tvaru. [4 body ♥]

Podívejme se tentokrát na druhou odrážku ze slide 16 z prvního cvičení (odkaz výše).

Zformulujte případ s lineárně klesající poptávkou jako hru v normálním tvaru, tj. navrhnete prostory strategií X_1, X_2 a výplatní funkce $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_1, x_2)$ tak, aby trojice $((1, 2), (X_1, X_2), (f_1, f_2))$ popisovala zadanou situaci. Na a se dívejme jako na parametr z intervalu $(0, 1]$, tj. výplatní funkce formulujte jako funkce proměnných x_1, x_2 a parametru a . Snažte se o co nejjednodušší a nejvíce explicitní tvar funkcí. Speciálně, vyvarujte se použití integrálu ve výsledné definici výplatních funkcí.

Úloha B.3: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou: NE. [2 ♥ až 6 bodů]

Pro hru v normálním tvaru z úlohy **B.2** naleznete Nashovo ekvilibrium, je-li $a = 2$.

Chcete-li všech 6 bodů, ekvilibrium odvoďte parametricky pro všechna $a \in (0, 3]$.

Úloha B.4: Zmrzlináři s konstantní poptávkou okolo jezera. [4 body]

Uvažujte situaci podobnou té v úloze **B.1**, s tím rozdílem, že pláž je uzavřená křivka délky 1, například kružnice. Vzdálenosti měřte na křivce (tj. po obvodu kružnice). (Rozdíl je tedy pouze v topologii pláže: pláž nyní nemá konce.)

Jak bude vypadat množina ekviliбриí pro 2 hráče? A jak pro 3 hráče?

2/3 průměru

Úloha B.5: Hra 2/3 průměru s celočíselnými strategiemi. [3 body]

Vizte opět **slidy** z prvního cvičení, nyní slide 15.

Naleznete všechna ekvilibria ve hře *2/3 průměru* modifikované tak, že čísla zvolená hráči z intervalu $[0, 100]$ mohou být pouze celá. Jistě, strategický profil $(0, \dots, 0)$ je ekvilibrium i v tomto případě: zmenšili-li jsme prostory strategií odebráním ne-celočíselných možností, strategie 0 zůstane pro každého hráče nejlepší volbou (pokud všichni ostatní hrají též 0).

Nicméně po zmenšení prostorů strategií mohou nějaká ekvilibria přibýt. Přibudou? Závisí to nějak na počtu hráčů? Jak? Zdůvodněte.

C Hry s konstantním součtem

Maticové hry

V sekci se podobně jako na cvičení používá konvence, že matice popisuje výplaty hráče volícího mezi řádky.

Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} R - 50 & 3M - 3 & 15 \\ 2M - 6 & 22 & D + 6 \\ -12 & D - 8 & R/2 \end{pmatrix},$$

jejíž prvky závisí na parametrech R, M, D .

Úloha C.1: Ekvilibrium ve smíšeném rozšíření.

[3 body ♥]

Personalizujte si matici A podle data narození. Za R dosaďte rok narození zmenšený o 1900, za M pořadové číslo měsíce v roce, za D pořadové číslo dne v měsíci.

Nalezněte Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Uveďte, jaké výplaty mají hráči, chovají-li se podle daného ekvilibria.

Úloha C.2: Vytvoření hry s více ekvilibrii.

[2 ♥ nebo 4 body]

Nastavte R , D a M v matici A tak, aby hra s maticí A měla více ekvibríí ve smíšeném rozšíření. Vytvoření hry s dvojicí stejných řádků nebo dvojicí stejných sloupců není povoleno.

Uveďte konkrétně alespoň dvě ekvilibria Vámi vytvořené hry.

Chcete-li všechny 4 body, vyrobte hru, ve které budou strategie obou hráčů ve dvou ekvilibriích odlišné, tj. ekvilibria budou strategické profily (x_1, y_1) a (x_2, y_2) takové, že $x_1 \neq x_2$ a $y_1 \neq y_2$.

Úloha C.3: Různá ekvilibria v ryzích strategiích

[4 body]

Rozhodněte, zda v maticové hře mohou existovat dvě ekvilibria (k_1, ℓ_1) a (k_2, ℓ_2) taková, že $f_1(k_1, \ell_1) \neq f_1(k_2, \ell_2)$. Nemohou-li existovat, dokažte. Mohou-li existovat, uveďte příklad takové hry.

Úloha C.4: Různá ekvilibria ve smíšeném rozšíření

[3 body]

Rozhodněte otázku v úloze C.3 pro smíšeném rozšíření.

Úloha C.5: Nalezení všech NE ve smíšeném rozšíření

[8 bodů]

Uvažujte hru s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Popište explicitně množinu všech ekviliбриí ve smíšeném rozšíření maticové hry s maticí B . Nejste-li si jistí, zda je Váš popis dostatečně explicitní, ozvěte se. Nezbytnou součástí řešení musí být podrobný postup, jak byl popis získán.

Hra o nejvyšší číslo

Úloha C.6: NE pro modifikovanou hru o nejvyšší číslo. [max. 4 body]

Vizte **textík** o hře o nejvyšší číslo a o symetrických hrách, konkrétně poslední odstavec sekce 1 a sekci 4.

Uvažujte modifikovanou hru o nejvyšší číslo. Rozhodněte, zda má hra Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, nalezněte alespoň 1 ekvilibrium. Plný počet bodů lze získat za nalezení všech ekviliбриí a zdůvodnění, že jich není více.

Hra o dělitelné zakázky

Úloha C.7: NE ve hře o dělitelné zakázky. [7 bodů]

Vizte **slidy** o hrách s konstatním součtem, konkrétně slide 19 (poslední).

Dokažte, že hra o dělitelné zakázky má ekvilibrium

$$\left(\begin{pmatrix} a \frac{s_1}{s} \\ a \frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ a \frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \frac{s_1}{s} \\ b \frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ b \frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix} \right),$$

kde $s = \sum_{i=1}^{\ell} s_i$ je celková hodnota všech zakázek (tj. hráči své disponibilní prostředky mezi zakázky rozdělí v poměru velikostí zakázek).

K řešení úlohy se může hodit využít tzv. **KKT podmínky**. Pro každého z hráčů je nutné dokázat, že svůj zisk maximalizuje pro příslušnou zvolenou strategii, je-li strategie druhého z hráčů konstantní.

D Bimaticové hry

Bimaticová hra při nekooperaci

Užívejme konvenci, že je-li bimaticová hra reprezentovaná dvojicí matic, odpovídá první z matic výplatám hráče, který vybírá řádkové strategie.

Uvažujte následující hru: Dvě firmy bojují o zakázky v hodnotách Z_1 , Z_2 a Z_3 . Hodnoty zakázek personalizujte podle data narození:

- $Z_1 = 60 + R$, kde za R dosadíte rok narození zmenšený o 1900.
- $Z_2 = 40 + 2M$, kde za M dosadíte pořadové číslo měsíce narození v roce,
- $Z_3 = 40 + D$, kde za D dosadíte den narození v měsíci.

O zakázky se bojuje lobováním: každá firma přiřadí každé zakázce objem peněžních jednotek, kterými za získání dané zakázky lobuje. Firma 1 má na lobování dvě peněžní jednotky, firma 2 pouze jednu jednotku. Lobovat je možné pouze v celých peněžních jednotkách. Firmy do lobování alokují veškeré prostředky, které mají k dispozici.

Firma zakázku získá tehdy, kdy pro ni lobuje alespoň jednou peněžní jednotkou a zároveň pro ni lobuje více jednotkami než konkurence. Pokud pro některou zakázku lobují obě firmy stejným nenulovým počtem peněžních jednotek, získá každá firma polovinu objemu dané zakázky.

Cílem obou firem je maximalizovat objem zakázek.

Úloha D.1: Sestavení bimaticové hry.

[2 body ♥]

Sestavte na základě výše uvedeného popisu dvojici matic popisující výplaty ve zmíněné hře. Rozhodněte, zda má hra ekvilibrium. Pokud ano, uveďte, jaká všechna ekvilibria jsou, a jaké výplatí funkce jim přísluší. Pokud ne, zdůvodněte, na základě čeho jste vyvodili, že hra ekvilibrium nemá.

Úloha D.2: Nalezení ekvilibria ve smíšeném rozšíření.

[3 body ♥]

Uvažujte smíšené rozšíření hry. Najděte alespoň jedno ekvilibrium pomocí bilineárního programu ze cvičení.

Uveďte postup. Výsledky interpretujte. Zejména uveďte, jaký konkrétní strategický profil (dvojice pravděpodobnostních rozdělení) je ekvilibrium. Uveďte také, jaké budou výplaty pro Vámi spočtené ekvilibrium.

Úloha D.3: Ekvilibria jako návod k jednání

[5 bodů]

Použijte některý z dostupných nástrojů pro nalezení všech ekvibrií ve smíšeném rozšíření bimaticové hry (např. online solver https://cgi.csc.liv.ac.uk/~rahul/bimatrix_solver/).

Uveďte všechna ekvilibria, která hra odvozená od Vašich hodnot zakázek má. Poskytuje koncept Nashova ekvilibria návod k jednání hráčů *ve smíšeném rozšíření hry*? Zdůvodněte.

Dále:

1. pokud koncept Nashova ekvilibria neposkytoval pro Vaši hru návod k jednání, najděte takové hodnoty Z_1, Z_2, Z_3 , aby koncept Nashova ekvilibria návod k jednání poskytoval. Svou volbu zdůvodněte a popište postup, jak jste se k hodnotám dostali, nebo
2. pokud koncept Nashova ekvilibria pro Vaši hru návod k jednání poskytoval, navrhnete takové hodnoty Z_1, Z_2, Z_3 , aby ve hře ekvilibrií bylo více a žádné z nich nedominovalo všechna ostatní. I v tomto případě uveďte, jak jste postupovali a proč.

Pro připomenutí, existuje-li ve hře více ekvilibrií, z nichž žádné nepřináší jednotlivým hráčům alespoň takovou výplatu, jako ostatní ekvilibria, nelze žádné z těchto ekvilibrií označit za návod k jednání. Speciálně, dominuje-li jedno z ekvilibrií všechna ostatní ekvilibria, je návodem k jednání.

Kooperace v bimaticové hře

Úloha D.4: Výpočet charakteristické funkce

[3 body ♥]

Předpokládejte, že hráči za žádných okolností nebudou hrát dominované strategie. Strategie, které nejsou dominované a se kterými budete pracovat, označte.

Předpokládejte, že je v bimaticové hře z úlohy D.1 povolena kooperace. Spočítejte hodnoty charakteristické funkce vyjadřující výplaty jednotlivých koalic, které mohou vzniknout. Za účelem výpočtu výplaty koalic vyslovte vhodné předpoklady o chování hráčů, kteří nejsou členy koalice: konkrétně, charakteristickou funkci spočítejte alespoň ve dvou variantách (viz [slidy](#)), jedna z nich však musí být minimaxová charakteristická funkce.

Úloha D.5: Kooperace s přenosnou výhrou

[2 body ♥]

Uvažujte nyní, že hráči bimaticovou hru z úlohy D.1 hrají kooperativně s přenosnou výhrou a že výplaty jednotlivých koalic jde zachytit pomocí minimaxové charakteristické funkce spočtené v úloze D.4.

1. Popište, jak vypadá *jádro hry* (tj. množina rozdělení, která jsou racionální pro všechny koalice) a zda je pro hráče výhodné kooperovat.
2. Pokud je pro hráče kooperace výhodná, navrhněte nějaké vhodné dělení celkové výhry, které považujete za spravedlivé. Lze použít i některý ze způsobů ve slidech. Svou volbu zdůvodněte.

Úloha D.6: Vlastnosti dělení výher navržených ve slidech

[2×4 body]

Uvažujte zcela obecnou kooperativní hru dvou hráčů ve tvaru charakteristické funkce popsanou čtveřicí výplat $v(\{1, 2\})$, $v(\{1\})$, $v(\{2\})$, $v(\emptyset) := 0$.

Na slidu 16 ve [slidech](#) jsou navržena dělení výhry v poměru hodnot charakteristických funkcí (odrážka 2) a dělení výhry v poměru přínosů (odrážka 3). Charakterizujte co nejlépe, pro jaké hodnoty $v_{\{1,2\}}$, $v_{\{1\}}$, $v_{\{2\}}$ patří takto navržená dělení do jádra hry.

Charakterizace musí být, podobně jako řešení všech ostatních úloh, obhájená.

Úloha D.7: Kooperace s nepřenosnou výhrou.

[4 bodů ♥]

Uvažujte opět bimaticovou hru z úlohy D.1 a minimaxovou charakteristickou funkci spočtenou v úloze D.4. Předpokládejte nyní, že výhra hráčů není přenosná.

- Určete množinu nedominovaných dosažitelných dvojic výplat, dále značenou D_n .
- V případě, že $|D_n| > 1$, tj. že nedominovaných dosažitelných dvojic výplat bude více, zvolte nějaký způsob, jak z nich vybrat dělení, které bude v nějakém smyslu spravedlivé (inspirace viz [slidy](#) o bimaticových hrách, můžete pochopitelně použít i některý ze způsobů přímo na slidech uvedený).

E Oligopol

Zadání si personalizujte pomocí data narození (nemusí být nutně Vaše vlastní; lze jej zvolit náhodně). Konkrétně, označme D pořadové číslo dne v měsíci a M pořadové číslo měsíce v roce.

Mějme hru $H = \{\{1, 2, 3\}, \{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\}, \{f_1, f_2, f_3\}\}$, kde $f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i c(x_1, x_2, x_3) - (n_i + v_i x_i)$ pro $i = 1, 2, 3$ a $c(x_1, x_2, x_3) = 6 - (0.47 + \frac{D}{300})(x_1 + x_2 + x_3)$. Parametry v, n pro jednotlivé hráče udává následující tabulka.

i	n_i	v_i	k_i
1	3	$0.5 + \frac{M}{20}$	6
2	2	0.9	$2.8 + \frac{D}{300}$
3	1	2.7	2

Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu, přičemž se pro jednoduchost předpokládá, že hráči mohou vyrábět jakékoli množství (potenciálně i záporné). Hráč i má fixní náklady n_i , variabilní náklady v_i ; funkce f_i je jeho zisková funkce, skládající se z výnosů z prodeje a nákladů. Funkce c je cena, závisující na celkovém vyrobeném množství.

Úloha E.1: Cournotův oligopol

[5 bodů ♥]

Předpokládejte, že hráči nespolupracují a svá výrobní množství volí současně. Naleznete Nashovo ekvilibrium, tj. výrobní množství oligopolistů taková, aby žádný z oligopolistů neměl motivaci své výrobní množství změnit. Uveďte též hodnoty výplatních funkcí jednotlivých oligopolistů a cenu komodity, která se na trhu dle cenové funkce utvoří.

Úloha E.2: Srovnání Stackelbergových duopolů

[dohromady 8 bodů ♥]

Předpokládejte, že se hry účastní pouze dva ze tří hráčů. Jsou tři možnosti, jak vybrat dvojici hráčů z dostupné trojice. Pro každou dvojici hráčů, řekněme hráče i a j , lze uvažovat dvě situace: hráč i je vůdce, hráč j je následník; nebo naopak, hráč j je vůdce a hráč i je následník. Stackelbergův oligopol funguje tak, že nejprve své množství zvolí vůdce, až poté následník; tj. následník již pracuje s informací, jaké množství vůdce vyrábí. Množství k_i pro jednotlivé hráče *ignorujte*.

Úkol. Úkol je následující. Uvažujte ekvilibrium pro každou ze 6 výše zmíněných konfigurací vůdce–následník. Ke každé konfiguraci uveďte cenu komodity, která se pro výrobní množství odpovídající ekvilibriu na trhu utvoří. Pro kterou z konfigurací je cena na trhu pro spotřebitele nejvýhodnější? Zdůvodněte, co činí dotčenou konfiguraci speciální, tj. proč je právě dotčená konfigurace nejvýhodnější.

Úlohu lze řešit buď hrubou silou, tj. vypočítat všech 6 ekvilibrií a pro každé spočítat cenu, nebo lze využít toho, že pozice hráčů je ve hře podobná v tom smyslu, že jejich ziskové funkce se liší jen variabilními a fixními náklady, a odvodit vlastnosti ekvilibrií a ceny v závislosti na nákladech.

Úloha E.3: Cournotův oligopol s více než jedním NE [6 bodů]

Během semestru jsme vždy pracovali s takovým nastavením výplatních funkcí oligopolistů v Cournotově oligopolu, že v příslušné hře bylo vždy jedinečné ekvilibrium.

Uvažujte oligopol se dvěma oligopolisty. Předpokládejte, že prostory strategií oligopolistů jsou $[0, k_i]$ a že výplatní funkce jsou $f_i(x_1, x_2) = x_i c(x_1, x_2) - N_i(x_i)$. Navrhněte k_1, k_2 a funkce $c(x_1, x_2)$, $N_1(x_1)$ a $N_2(x_2)$ tak, aby ve hře existovalo více Nashových ekvilibrií. K volbě funkcí i kapacit oligopolistů vymyslete ekonomickou interpretaci, ve které navržené funkce budou dávat smysl. Ekonomická interpretace může být jakkoli okrajová nebo jakkoli nepravděpodobná, ale musí být konzistentní.

Ekvilibria ve Vámi navržené hře vypište a spočtete hodnoty výplatních funkcí.

F Hry v rozvinutém tvaru

Úloha F.1: Test

[5 bodů ♥]

Situace. Student píše test. Protože není dobře připraven, řeší otázku, zda opisovat, či nikoli.

Pokud student opisovat bude, může nastat následující:

- Dozor studenta odhalí a potrestá; to nastane s pravděpodobností $2/5$.
- Dozor opisování vůbec nezaregistruje; to nastane s pravděpodobností $1/10$.
- Dozor pojme podezření, že student opisuje, a zaměří naň svou pozornost; to nastane v ostatních případech.

V případě podezření na opisování má dozor dvě možnosti: buď studenta napomené, nebo ho bude pouze sledovat a vysílat k němu významné pohledy; student tedy vždy ví, že dozor podezření pojal.

Student má v případě, že je podezřelý, dvě možnosti: buď bude pokračovat v opisování, nebo s opisováním přestane a bude lovit poznatky z paměti. Pokračuje-li v opisování, bude odhalen a potrestán s pravděpodobností $0,65$, s pravděpodobností $0,35$ si dozor ničeho dalšího nevšimne.

Hodnoty užítu a další předpoklady. Student i dozor jsou racionální a znalí teorie her. Cílem každého z nich je maximalizovat střední hodnotu svého užítu. Hodnoty užítu se stanoví podle následujících pravidel:

- Pokud je student odhalen a potrestán za opisování, má nezávisle na ostatních okolnostech užitek 0 .
- Pokud student neopisuje nebo není odhalen, je jeho užitek součtem počtu bodů, které získá za test, a případných modifikací.
- Neopisuje-li student vůbec, získá za test 6 bodů.
- Student, který opíše celý test, za něj získá 15 bodů.
- Pokud student opíše část testu a poté, co dozor pojme podezření, opisovat přestane, získá za test 8 bodů.
- Pokud je student dozorem veřejně napomínán, cítí se hloupě a hodnota jeho užítu se sníží o 5 .
- Základní užitek dozoru je 10 .
- Pokud dozor potrestá studenta bez napomenutí, vyvolá to negativní ohlas u studentů, kteří začnou mít pochybnosti, zda byla akce nutná, a dozor proto získá užitek 5 , *nezávisle na ostatních okolnostech*.
- Pokud dozor pojme podezření, má ze své činnosti špatný pocit a hodnota jeho užítu se sníží o 2 .
- Pokud dozor napomíná studenta, cítí se podobně nepříjemně jako on, protože sděluje pouze podezření a potenciálně napomíná poctivého, a jeho užitek se sníží o (další) 3 .
- Pokud dozor potrestá studenta po napomenutí, zbaví se pochybností i špatného pocitu a jeho užitek bude 10 , *nezávisle na ostatních okolnostech*.

Zjistěte, jak se budou aktéři dění chovat, a jak by se chovali v jednotlivých dílčích situacích, do kterých by se hra mohla dostat. Jaké budou střední hodnoty užítu pro jednotlivé strategie?

Úloha F.2: Počet stavů v piškvorkách 3×3 .

[3×3 body]

Spočítejte, kolik různých stavů může nastat ve hře na slidu 4 ve **slidech o hrách v rozvinutém tvaru**. V následujících úlohách předpokládejte, že se hra nachází ve stavu, kdy je hrací pole zcela prázdné, tj. stav hry zobrazený na slidu **ignorujte**. V návaznosti na diskuzi na cvičení rozlišujte následující pojetí *stavu* hry.

- Stav hry je charakterizován posloupností odehraných tahů, každý tah znamená umístění křížku nebo kolečka na konkrétní pozici na plán. Počet stavů hry je počet vrcholů úplného stromu hry bez redukcí za symetrie nebo shodné konfigurace křížků a koleček.
- Stav hry je charakterizován pozicí značek na hracím plánu bez zohlednění symetrií pozic. Počet stavů hry je tak počet možných konfigurací křížků a koleček bez redukcí za symetrie.
- Stav hry je charakterizován pozicí značek na hracím plánu se zohledněním symetrií a rotací hracího plánu. Počet stavů hry je tak počet konfigurací křížků a koleček, které nabízí rozdílné možnosti z pohledu možného výsledku hry.

Za těsnou horní mez pro každé z pojetí výše lze získat 3 body. Za méně těsné meze lze získat méně bodů. Za triviální horní meze žádné body nebudou.

Úloha F.3: Počet stavů ve hře Otrávená čokoláda.

[4 body ♥]

Dokažte, že hra Otrávená čokoláda (slide 7 **slidů o hrách v rozvinutém tvaru**) se může dostat do počtu stavů exponenciálního v menším z rozměrů čokolády.

K tomu stačí ukázat, že takové stavy lze zkonstruovat. Zamyslete se nad tím, jak stavy vhodně kódovat, aby byla konstrukce snadná.

Úloha F.4: Piráti

[max. 7 bodů]

Na prvním cvičení jsme se bavili o hře Piráti (viz slide 6 **úvodních slidů**). Zjistili jsme, že v případě, kdy je ve hře $n = 5$ pirátů, kteří si mají rozdělit $m = 100$ mincí, má být nabídka prvního piráta na dělení výhry $(97, 0, 1, 2, 0)$.

Zde se zamyslete nad případy, kdy jsou hodnoty m a n nějak speciální, například že jsou v nepřírozeném vztahu. Jak například bude vypadat nabídka, kterou má první pirát vznést, je-li $m = 0$? Budou ji piráti ochotni odhlasovat? Bude její přijetí ze strany pirátů nějak záviset na n ?

A jak bude situace vypadat pro jednotlivé kombinace m a n ? Speciální pozornost si zaslouží případy, kdy $m < n$. Popište obecně, jak vypadá nejlepší nabídka nejstaršího piráta pro jednotlivé kombinace n a m . Zdůvodněte, proč je nabídka nejlepší, případně proč pro danou kombinaci n a m žádná odhlasovatelná nabídka neexistuje.

Úloha F.5: Pistolníci

[4 body ♥]

Uvažujte hru Pistolníci (viz slide 8 **slidů o hrách v rozvinutém tvaru**). Předpokládejte, že kromě cíle „maximalizuj pravděpodobnost, že ve hře zůstaneš poslední“ mají pistolníci ještě cíl „ukonči hru co nejdříve“. Druhý cíl se použije pouze v případě, že varianty jsou podle prvního cíle stejně dobré.

Na konci slide jsou vysloveny zjednodušující pravidla:

1. Pokud jsou naživu už jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.
2. Pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3.
3. Pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2.

Dokažte, že chování dle těchto pravidel je pro pistolníky racionální.

G Hlasovací hry

Úloha G.1: Výpočet indexů síly.

[5 bodů ♥]

Uvažujme hlasovací hru, které se účastní 5 politických stran. Jednotlivé politické strany disponují počty hlasů $a_1, a_2, a_3, 46$ a 75 . Uvažujte hlasovací pravidlo α . Počty hlasů si personalizujte podle data narození, přičemž

- $a_1 = R + 15$, kde za R dosadíte poslední dvojčíslí roku narození,
- $a_2 = 20 + 6M$, kde za M dosadíte pořadové číslo měsíce narození v roce,
- $a_3 = 3D$, kde za D dosadíte den narození v měsíci, a
- $\alpha = 0,48 + D/300$, kde za D dosadíte opět den narození v měsíci.

Spočítejte pro jednotlivé strany hodnoty Shapley-Shubikova indexu síly a Banzhafova indexu síly.

Úloha G.2: Indexy síly v závislosti na hlasovacím pravidle.

[7 bodů]

Uvažuje hlasovací hru se 6 hráči a počty hlasů $82, 64, 83, 42, 57, 77$. Dokažte, že pro všechna iracionální hlasovací pravidla α platí, že vektor Banzhafových indexů síly pro hlasovací pravidla α i $1 - \alpha$ je stejný.

Obecněji, rozhodněte, co musí splňovat počty hlasů a hlasovací pravidlo α v hlasovací hře, aby vektor Banzhafových indexů síly pro hlasovací pravidlo α byl shodný jako vektor pro hlasovací pravidlo $1 - \alpha$.

H Bayesovská hra

Personalizace. Následující zadání si personalizujte pomocí následujících hodnot

- $p_1 = R/201$, kde za R dosadíte rok narození zmenšený o 1900,
- $p_2 = 1 - R/201$, kde R je určeno stejně jako v předešlém bodě,
- $v_1 = 1 + D/40$, kde za D dosadíte den narození v měsíci.
- $v_2 = 1 + M/15$, kde za M dosadíte pořadové číslo měsíce v roce.

Použité datum narození může být vaše vlastní nebo Vámi náhodně zvolené, s jednou výjimkou: rok narození můžete v této úloze nastavit dle vlastní volby.

Situace Uvažujme hru dvou hráčů s neúplnou informací s následujícími parametry. Každý z hráčů volí jednu ze dvou strategií. Každý z hráčů může být jednoho ze dvou typů. Pravděpodobnost, že hráč 1 bude typu 1, je p_1 . Pravděpodobnost, že hráč 2 bude typu 1, je p_2 .

Výplaty každého z hráčů jsou *soukromé*, tj. nezávisí na typu protihráče. Výplatní matice hráče 1 v závislosti na jeho typu označme A^1, A^2 . Výplatní matice hráče 2 v závislosti na jeho typu označme B^1, B^2 . Strategie hráče 1 odpovídají řádkům, strategie hráče 2 sloupcům. Výplatní matice jsou následující:

$$A^1 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_1/2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & v_2/2 \end{pmatrix}.$$

Úloha H.1: Bayesovská hra dvou hráčů.

[8 bodů ♥]

Zamyslete se nad tím, zda je zadání výše úplné. Případnou neúplnost zadání komentujte. Bude-li se Vám zdát, že zadání úplné není, můžete si úkol ulehčit doplněním zadání dle vlastní volby. Nalezněte Bayesovo-Nashovo ekvilibrium (v ryzích strategiích) nebo dokažte, že neexistuje.

I Rozhodování při neurčitosti

Zadání v této sekci si personalizujte dosazením hodnot R, M, D . Ty jsou určeny na základě data narození:

- za R dosazujte poslední dvojčíslí roku narození,
- za M dosazujte pořadové číslo měsíce narození v roce, a
- za D dosazujte pořadové číslo dne narození v měsíci.

Použijte buď vlastní datum narození, nebo náhodně vybrané.

Situace. Je dána rozhodovací situace za neurčitosti. Rozhodovatel má na výběr z m variant $v_1, \dots, v_m$. Poté, co některou z variant vybere, nastane některý z n stavů světa $s_1, \dots, s_n$. V případě, že rozhodovatel vybere variantu v_i a nastane stav světa s_j , bude rozhodovatel čerpat známý zisk a_{ij} . Rozhodovatel nemá žádné informace o rozdělení pravděpodobností nad jednotlivými stavy světa.

Konkretizace zadání. Uvažujme nyní výše nastíněnou situaci pro $m = n = 5$. Hodnoty a_{ij} jsou pro všechny myslitelné kombinace varianty a stavu světa uspořádány v matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 \\ 21 & 8 + \lfloor M/2 \rfloor & 3 & 1 & 0 \\ 10 + D & 10 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & \lfloor R/4 \rfloor & 16 & 2 \end{pmatrix},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část čísla a (tj. číslo a zaokrouhlené na nejbližší nižší celé číslo).

Úloha I.1: Standardní principy

[3 body ♥]

Vyberte nejvhodnější variantu pomocí každé z následujících standardních metod:

1. Laplaceův princip,
2. Waldův princip maximinu,
3. Hurwitzův princip vyváženého optimismu – použijte ukazatel optimismu $\alpha = (M \cdot D + R)/(12 \cdot 31 + 99)$ a
4. Savageův princip minimaxu ztráty.

Ke každému principu uveďte pro každou variantu hodnoty kritérií, podle kterých jste nejvhodnější variantu vybírali.

Úloha I.2: Princip maximálního polyedru

[5 nebo 8 bodů]

Podle *principu maximálního polyedru* je v rozhodovací situaci za neurčitosti nejvhodnější ta varianta, která má největší očekávanou hodnotu výhry pro nejvíce potencionálních přiřazení pravděpodobností $p_1, \dots, p_n$ jednotlivým stavům světa.

Jedno z možných odůvodnění tohoto principu je následující: poté, co rozhodovatel vybere některou z variant (ale předtím, než některý ze stavů světa skutečně nastane), dozví se pravděpodobnostní rozdělení nad stavy světa. Ve chvíli, kdy se tak stane, je jeho rozhodnutí posuzováno vyšší mocí na základě očekávané hodnoty výhry

(například, je-li rozhodovatelem bezradný zaměstnanec, může onou vyšší mocí být „vždy vševědoucí“ šéf). Jsou-li všechna rozdělení pravděpodobností nad stavy světa stejně pravděpodobná, maximalizuje princip největšího polyedru pravděpodobnost, že se bude při výše popsaném posuzování podle střední hodnoty výhry jevit vybraná varianta jako nejvhodnější.

Vzhledem k tomu, že množina všech potenciálních pravděpodobnostních rozdělení $p_1, \dots, p_n$ nad stavy světa, tj. $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, p \geq 0\}$ je $(n-1)$ -dimenzionální polyedr (vlastně, jde o speciální polyedr s pěknými vlastnostmi, tzv. *simplex*), je patrně nejvhodnějším kritériem pro porovnávání variant $(n-1)$ -dimenzionální objem množiny všech pravděpodobnostních rozdělení, pro které je nejlepší ta která varianta.

Pro variantu ℓ je kritériální hodnota

$$k_\ell = \text{vol}(\{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1, p \geq 0, \sum_{j=1}^n p_j a_{\ell j} \geq \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}, i = 1, \dots, m\})$$

Můžete buď:

1. úlohu řešit jen pro stavy světa s_1, s_2, s_3 , tj. uvažovat jen první tři sloupce matice A . Pak lze řešit na papíře, ale lze získat jen 5 bodů.
2. úlohu řešit pro všech 5 stavů světa. Budete potřebovat nástroj pro výpočet 4dimenzionálního objemu. Z běžně dostupných matematických prostředí (MatLab, R, aj.) se dá volat knihovna quickhull. Zde můžete získat 10 bodů.