4EK421 – zadání úkolů – sada 1

Formality.

Odevzdání. Úkol se odevzdává do příslušné odevzdávárny v InSIS. Odevzdáte-li úkol v dostatečném předstihu, řekněme nejpozději 48 hodin před uzavřením odevzdávárny, úkol okomentuji a vrátím k doplnění. Tímto způsobem úkol půjde odevzdávat i po částech. Tuto možnost doporučuji využít.

Forma a obsah úkolů. Součástí odevzdaných úkolů musí být i komentář, zejména by mělo být patrné, jak bylo řešení dosaženo, proč byly provedeny kroky, které byly provedeny, apod. K tomu je nejvhodnější formou ucelený text, případně doplněný o další materiály.

Při zpracování úkolů můžete spolupracovat, ať již s kolegy, se mnou, s jazykovými modely. Výsledný text nicméně musí být Váš. Zejména bych nerad trávil čas čtením a komentování textů generovaných AI.

Bodování. Některé úlohy považuji za jednodušší než jiné. Celkový počet bodů za úlohy, které považuji za jednodušší, bude během semestru 50.

V této sadě považuji za jednodušší úlohy 2, 6 a 7 v celkové hodnotě 8 bodů. Ostatní úlohy vyžadují nějaký nápad a budu u nich požadovat preciznější řešení.

Personalizace zadání. Žádá-li zadání úkolu, abyste si jej personalizovali podle data narození, lze použít vlastní datum narození nebo datum zvolit náhodně samplováním z *rozumné* distribuce. Příklad rozumné distribuce: nezávislá na distribucích ostatních studentů, pokrývá několik let okolo skutečného data narození. Máte-li pochybnosti o tom, zda je Vaše distribuce rozumná, nejspíš rozumná není.

Zmrzlináři

Úloha 1: Zmrzlináři s konstantní poptávkou. [max. 5 bodů]
Vizte slidy z prvního cvičení, konkrétně první odrážku na slide 16.

Případ tří zmrzlinářů s konstantní poptávkou jsme řešili na cvičení – tam ekvilibrium neexistovalo. Existuje ekvilibrium, pokud zmrzlináři budou 4? Jak je to v případě 5 zmrzlinářů? A co když je zmrzlinářů 6, nebo obecněji, n? A je ekvilibrium unikátní, nebo jich existuje více?

Jakákoli odpověď musí být řádně zdůvodněna. Plný počet bodů lze získat za charakterizaci ekvilibrií ve všech případech.

Úloha 2: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou jako hra v normálním tvaru. [3 body]
Podívejme se tentokrát na druhou odrážku ze slide 16 z prvního cvičení (odkaz výše).

Zformulujte případ s lineárně klesající poptávkou jako hru v normálním tvaru, tj. navrhněte prostory strategií X_1, X_2 a výplatní funkce $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_1, x_2)$ tak, aby trojice $((1, 2), (X_1, X_2), (f_1, f_2))$ popisovala zadanou situaci. Na a se dívejme jako na parametr z intervalu $(0, 1]$, tj. výplatní funkce formulujte jako funkce proměnných x_1, x_2 a parametru a. Snažte se o co nejjednodušší a nejvíce explicitní tvar funkcí. Speciálně, vyvarujte se použití integrálu ve výsledné definici výplatních funkcí.

Úloha 3: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou – nalezení NE. [max. 5 body]
Pro hru v normálním tvaru z úlohy 2 nalezněte Nashovo ekvilibrium, je-li $a = 2$.

Chcete-li všech 5 bodů, ekvilibrium odvoďte parametricky pro libovolné $a \in (0, 3]$.

Úloha 4: Zmrzlináři s konstantní poptávkou okolo jezera. [4 body]
Uvažujte situaci podobnou té v úloze 1, s tím rozdílem, že pláž je uzavřená křivka délky 1, například kružnice. Vzdálenosti měřte na křivce (tj. po obvodu kružnice). (Rozdíl je tedy pouze v topologii pláže: pláž nyní nemá konce.)

Jak bude vypadat množina ekvilibrií pro 2 hráče? A jak pro 3 hráče?

2/3 průměru

Úloha 5: Hra 2/3 průměru s celočíselnými strategiemi. [3 body]
Vizte opět slidy z prvního cvičení, nyní slide 15.

Nalezněte všechna ekvilibria ve hře *2/3 průměru* modifikované tak, že čísla zvolená hráči z intervalu $[0, 100]$ mohou být pouze celá. Jistě, strategický profil $(0, \dots, 0)$ je ekvilibriem i v tomto případě: zmenšili-li jsme prostory strategií odebráním neceločíselných možností, strategie 0 zůstane pro každého hráče nejlepší volbou (pokud všichni ostatní hrají též 0).

Nicméně po zmenšení prostorů strategií mohou nějaká ekvilibria přibýt. Přibudou? Závisí to nějak na počtu hráčů? Jak? Zdůvodněte.

Maticové hry

V sekci se podobně jako na cvičení používá konvence, že matice popisuje výplaty hráče volícího mezi řádky.

Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} R-50 & 3M-3 & 15 \\ 2M-6 & 22 & D+6 \\ -12 & D-8 & R/2 \end{pmatrix},$$

jejíž prvky závisí na parametrech R, M, D.

Úloha 6: Ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. [3 body]
Personalizujte si matici A podle data narození. Za R dosaďte rok narození zmenšený o 1900, za M pořadové číslo měsíce v roce, za D pořadové číslo dne v měsíci.

Nalezněte Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Uveďte, jaké výplaty mají hráči, chovají-li se podle daného ekvilibria.

Úloha 7: Vytvoření hry s více ekvilibrii. [2 body]
Nastavte R, D a M v matici A tak, aby hra s maticí A měla více ekvilibrií ve smíšeném rozšíření. Vytvoření hry s dvojicí stejných řádků nebo dvojicí stejných sloupců není povoleno.

Uveďte konkrétně alespoň dvě ekvilibria Vámi vytvořené hry.

Úloha 8: Různá ekvilibria v ryzích strategiích [4 body]
Rozhodněte, zda v maticové hře mohou existovat dvě ekvilibria (k_1, ℓ_1) a (k_2, ℓ_2) taková, že $f_1(k_1, \ell_1) \neq f_1(k_2, \ell_2)$. Nemohou-li existovat, dokažte. Mohou-li existovat, uveďte příklad takové hry.

Úloha 9: Různá ekvilibria ve smíšeném rozšíření [3 body]
Rozhodněte otázku v úloze 8 pro smíšeném rozšíření.

Úloha 10: Nalezení všech NE ve smíšeném rozšíření [6 bodů]
Uvažujte hru s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Popište explicitně množinu všech ekvilibrií ve smíšeném rozšíření maticové hry s maticí B. Nejste-li si jistí, zda je Váš popis dostatečně explicitní, ozvěte se. Nezbytnou součástí řešení musí být podrobný postup, jak byl popis získán.

Hra o nejvyšší číslo

Úloha 11: NE pro modifikovanou hru o nejvyšší číslo. [max. 4 body]
Vizte textík o hře o nejvyšší číslo a o symetrických hrách, konkrétně poslední odstavec sekce 1 a sekci 4.

Uvažujte modifikovanou hru o nejvyšší číslo. Rozhodněte, zda má hra Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, nalezněte alespoň 1 ekvilibrium. Plný počet bodů lze získat za nalezení všech ekvilibrií a zdůvodnění, že jich není více.

Hra o dělitelné zakázky

Úloha 12: NE ve hře o dělitelné zakázky. [7 bodů]

Vizte slidy o hrách s konstatním součtem, konkrétně slide 19 (poslední).

Dokažte, že hra o dělitelné zakázky má ekvilibrium

$$\left(\begin{pmatrix} a\frac{s_1}{s} \\ a\frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ a\frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b\frac{s_1}{s} \\ b\frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ b\frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix} \right),$$

kde $s = \sum_{i=1}^{\ell} s_i$ je celková hodnota všech zakázek (tj. hráči své disponibilní prostředky mezi zakázky rozdělí v poměru velikostí zákázek).

K řešení úlohy se může hodit využít tzv. KKT podmínky. Pro každého z hráčů je nutné dokázat, že svůj zisk maximalizuje pro příslušnou zvolenou strategii, je-li strategie druhého z hráčů konstantní.