

# 4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

## Hlasovací hry, hry v rozvinutém tvaru

MIROSLAV RADA

Vysoká škola ekonomická v Praze

3. května 2016

# Volební (hlasovací) hry

## Situace:

- Máme parlament o  $m$  křeslech, ve kterém je  $n$  politických stran s počty mandátů  $a_1, \dots, a_n$ .
- Pro přijetí návrhu v parlamentu je třeba  $k$  hlasů, kde  $k > \alpha m$  pro nějaké  $0 \leq \alpha \leq 1$ .
- Parametr  $\alpha$  se nazývá *hlasovací pravidlo*.
- Platí (ne)rozumné předpoklady: členové stran hlasují jednotně, členové koalic hlasují jednotně, všechny koalice jsou stejně pravděpodobné.

## Cíl:

- uvažovat situaci jako kooperativní hru a odhadnout sílu hráčů v konfliktu
- charakteristická funkce koalice  $K$  bude zřejmě

$$v(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{i \in K} a_k > \alpha m \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

# Příklad – volební hry

**Zadání:** Mějme politické strany s počty mandátů 50, 30, 60. Spočtěme, jak se mění

- Shapley-Shubikův index síly (Shapleyova hodnota), a
- Banzhafův index síly (Shapleyova hodnota s jednotkovými váhami)

v závislosti na hlasovacím pravidle  $\alpha$ .

## Indexy síly:

- $S_i = \{K \subseteq N : v(K) = 1 \wedge v(K \setminus \{i\}) = 0\}$  pro všechna  $i \in N$ ,  
 $e_i = |S_i|$ .
- Shapley-Shubik:

$$s_i = \sum_{K \subseteq S_i} \frac{(|K| - 1)!(n - |K|)!}{n!},$$

- Banzhaf:

$$\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{j \in N} e_j}$$

# Hra v rozvinutém tvaru – příběh

- Mějme hru s řadou po sobě jdoucích rozhodnutí.
- Hra se v každém okamžiku nachází v nějakém *stavu*. Stav je určen počátečním modelem hry a předcházejícími rozhodnutími. Poté, co je přijato nějaké rozhodnutí, se stav hry může změnit. Stavů jsou *rozhodovací* nebo *pravděpodobnostní*
- V každém rozhodovacím stavu se rozhoduje právě jeden hráč, který vybírá některou ze spočetně mnoha strategií.
- Příklad: šachy, jiné hry apod.
- Přechody v pravděpodobnostních stavech jsou předem určené.

# Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *BoS* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1, 2 & 0, 0 \\ 0, 0 & 2, 1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

## **Modifikace:**

Řekněme, že jeden z manželů odchází z práce dřív a koupí lístky dle vlastního výběru. Druhý se buď přidá, nebo si koupí vlastní lístek na druhý koncert.

- Jak se mají hráči chovat, pokud se bude rozhodovat dříve řádkový hráč?
- A co v případě sloupcového hráče?

# Piškvorcky $3 \times 3$

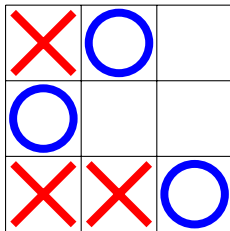
- Mějme piškvorcky v mřížce  $3 \times 3$ . Velikost políčka je  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ .
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka (velikost značky libovolná).
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

# Piškvorcky $3 \times 3$

- Mějme piškvorcky v mřížce  $3 \times 3$ . Velikost políčka je  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ .
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka.
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

## Otázky:

- Odvoďme nějakou horní mez počtu stavů, do kterých se hra může dostat?
- Sestavme graf podhry, nacházející se ve stavu níže (modrý na tahu).



# Model hry v rozvinutém tvaru

Za model hry  $H$  v rozvinutém tvaru vezměme množinu

$H = \{N, G = \{S, R\}, f, v, p\}$ , kde

- $N = \{1, \dots, n, 0\}$  je množina hráčů, 0 je fiktivní hráč (hraje smíšené strategie v pravděpodobnostních stavech),
- $G$  je orientovaný graf popisující možná rozhodnutí v dané hře, určený
  - množinou  $S$  jednotlivých stavů, ve kterých se hra může nacházet,
  - množinou  $R \subseteq S \times S$  možných rozhodnutí; pokud  $(s_1, s_2) \in R$ , znamená to, že zahráním některé strategie se lze přesunout do stavu  $s_2$ .
- $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$  je zobrazení přiřazující jednotlivým stavům výplaty jednotlivých hráčů; ty jsou vypláceny okamžitě ve chvíli, kdy hra do daného stavu vstoupí,
- $v : S \mapsto N$  je zobrazení přiřazující jednotlivým stavům hráče, který se v daném stavu rozhoduje,
- $p$  je zobrazení přiřazující každému pravděpodobnostnímu stavu  $s$  (tj.  $s \in \{s \in S : v(s) = 0\}$ ) rozdělení pravděpodobností nad jednotlivými hranami vycházejícími z  $s$  (tj. hranami  $\{(s, t) \in R : t \in S\}$ ).

# Model hry v rozvinutém tvaru – poznámky a způsob řešení

- Typicky jsou nenulové  $f$  jen ve stavech, ze kterých už nevedou žádné hrany (dá se transformovat, viz také níže), říkáme jim *listy*.
- Graf  $G$  je typicky strom (tj. souvislý acyklický).
- Graf  $G$  může být složitý, ale dá se zestromovatět (na nekonečnou výšku nebo šířku).
- Informace, co přesně znamenají jednotlivá rozhodnutí, v modelu obecně být nemusí. Pokud dvě různá rozhodnutí vedou do stejného stavu, model to nemusí rozlišovat.

Způsob řešení u acyklického  $G$ :

- Každému stavu pro každého hráče přiřadit celkovou výplatu, kterou hráč získá, pokud se hra do daného stavu dostane. Označme takové přiřazení  $g : S \mapsto \mathbb{R}^n$ .
- Odspodu: v listech jsou výplaty jasné. Vedou-li z nějakého stavu hrany jen do už vyhodnocených uzlů, lze vybrat nejlepší rozhodnutí pro hráče, který se právě rozhoduje. Tedy, vybírá-li se strategie ve stavu  $s$ , je  $g(s) = g(\arg \max_{u:(s,u) \in R} g(u)_{v(s)})$

# Otrávená čokoláda

## Situace:

- je dána čtvercová tabulka čokolády o rozměru  $m \times n$ ,  $\max\{m, n\} > 1$
- dílek na pozici  $(1, 1)$  je otrávený
- hráči čokoládu postupně ujidají
- kdo sní otrávený dílek, prohrál
- hráč, který je na tahu, vybere nesněděný dílek  $(i, j)$  a sní vše ve čtverci  $(i, j)$ ,  $(i, n)$ ,  $(n, j)$ ,  $(n, n)$

Hru je možné hrát na <http://hry.polyedr.cz/chocolate>.

## Úkoly.

- Uvažujme hru s  $m = n > 1$ . Popišme vyhrávající strategii pro hráče, který začíná.
- Dokažme, že (v obecném případě) existuje vyhrávající strategie pro hráče, který začíná.
- Ukažme, že počet stavů, do kterých se hra může dostat, je exponenciálně velký v  $\Omega(\min\{m, n\})$  (tj. že vyhrávající strategii není únosné hledat hrubou silou;  $\Omega(x)$  znamená funkci větší než nějaká lineární funkce  $x$ ).

# Příklad – pistolníci

## Situace:

- Tři pistolníci jsou v souboji.
- Pokud jsou na řadě se střelbou, trefí se s pravděpodobnostmi  $p_1 = 1/3, p_2 = 1/2, p_3 = 1$ .
- Mohou střílet buď na soupeře podle vlastního výběru, nebo do vzduchu ( $p = 1$ ).
- Pokud je některý pistolník zasažen, dál se neúčastní.
- První střílí 1, pak 2, účastní-li se ještě, pak 3 účastní-li se ještě, pak 1, účastní-li se ještě, atd.

**Cíl:** maximalizovat pravděpodobnost, že v souboji zůstane jako poslední.

**Otázka:** na koho má střílet první pistolník?

## Zjednodušující předpoklady:

- pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3,
- pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2,
- pokud jsou naživu již jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.