

4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Maticové hry a hry s konstantním součtem obecně

ONDŘEJ SOKOL

MIROSLAV RADA

Vysoká škola ekonomická v Praze

1. března 2016

Hra s konstantním součtem v normálním tvaru

Hra s konstantním součtem je hra v normálním tvaru

$H = \{N, S, V\}$ zadaná

- množinou hráčů $N := \{1, \dots, n\}$,
- množinou prostorů strategií – $S := \{X_1, \dots, X_n\}$ a
- množinou výplatních funkcí $V := \{f_1, \dots, f_n\}$, kde
 - pro $i \in N$ je $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$,
 - $X := X_1 \times \dots \times X_n$ a
 - $\sum_{i \in N} f_i = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Budeme se zabývat hledáním Nashových ekvilibrií pro tyto hry.

Převod na hru s nulovým součtem

Definujme $f'_1(x) = f_1(x) - k$.

Uvažujme hru $H' = \{N, S, \{f'_1, f_2, \dots, f_n\}\}$.

Tvrzení

Strategie $x^ \in X$ jsou NE hry H , právě když jsou NE hry H' .*

Ke $x^* \in X, i \in N, \xi \in X_i$ definujme strategii

$$x(i, \xi) := (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \xi, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

Jakákoli strategie $x^* \in X$ splňující $f_i(x^*) \geq f_i(x(i, \xi))$ pro $i \in N$ splňuje i $f'_1(x^*) \geq f'_1(x(1, \xi))$, neboť posledně jmenovaná nerovnost lze přičtením k převést na dříve jmenovanou. Opak analogicky.

Důsledek

Při hledání Nashova ekvilibria (NE) lze BÚNO předpokládat, že $k = 0$:

O hrách H a H' hovoříme jako o *strategicky ekvivalentních*.

Dva hráči a konstantní součet – antagonistická hra

- Hra s konstantním součtem s $n = 2$ se nazývá *antagonistická hra*. Situaci usnadňuje absolutní protichůdnost zájmů hráčů: pokud $k = 0$, pak to, co jeden vyhraje, druhý ztratí.
- Lze tedy psát $H = \{\{1, 2\}, \{X_1, X_2\}, \{f_1, -f_1\}\}$.
- Definiční nerovnosti Nashovy rovnováhy se pak zapíšou jako

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*) &\geq f_1(x_1, x_2^*), \\ -f_1(x_1^*, x_2^*) &\geq -f_1(x_1^*, x_2) \Leftrightarrow f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2), \end{aligned}$$

nebo také

$$f_1(x_1, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2) \quad \text{pro všechna } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

Konečná antagonistická hra – maticová hra

- Antagonistická hra, ve které mají oba hráči konečný počet strategií, se nazývá *maticová hra*. Jde o to, že výplatní funkce v takové hře se dá sledovat v matici, a taková matice pak hru plně popisuje:

$$H = \{\{1, 2\}, \{\{1, \dots, m_1\}, \{1, \dots, m_2\}\}, \{f_1(i, j) = a_{ij}, f_2 = -f_1\}\},$$

- kde $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$. Předpokládáme tak, že strategie hráče 1 resp. 2 odpovídají řádkům resp. sloupcům matice A .
- Zřejmě, každá matice popisuje maticovou hru.
- Dvojice (k, l) je NE (v ryzích strategiích) v maticové hře, pokud pro všechna $i \in X_1$ a $j \in X_2$ platí $a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj}$.
- Prvek a_{kl} matice A se nazývá *sedlový bod*; je to největší prvek ve sloupci l a nejmenší prvek v řádku k .
- Problém: sedlový bod nemusí existovat.

Hledání NE v ryzích strategiích

Idea: najít zvlášť taková (k, l) , že $a_{il} \leq a_{kl}$ a zvlášť (k, l) vyhovující $a_{kl} \leq a_{kj}$, tj. najít takové dvojice strategií, u kterých by si nemohl při odchýlení polepšit hráč 1 resp. 2.

- Pro každou strategii l hráče 2 najdeme množinu $K_l = \arg \max_{k \in X_1} a_{kl}$ strategií hráče 1, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii l hráče 2. Snadno získáme množinu K dvojic strategií (k, l) , $k \in K_l, l \in X_2$, splňující $a_{il} \leq a_{kl}$ pro všechna $i \in X_1$.
- Pro každou strategii k hráče 1 najdeme množinu $L_k = \arg \min_{l \in X_2} a_{kl}$ strategií hráče 2, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii k hráče 1. Snadno získáme množinu L dvojic strategií (k, l) , $l \in L_k, k \in X_1$, splňující $a_{kj} \geq a_{kl}$ pro všechna $j \in X_2$.
- Množina všech NE je množina všech (k, l) takových, že jsou zároveň v K i v L .

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & 2 \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & 2 \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & \underline{1} \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{3\} \\ L_3 &= \{1\} \\ L &= \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{3\} \\ L_3 &= \{1\} \\ L &= \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\} \\ K \cap L &= \{(1, 3)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$K_1 = \{2\}$$
$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & 4 & 2 \\ \mathbf{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & 2 \\ \bar{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \mathbf{2} \\ \bar{4} & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} \color{red}3 & \color{red}4 & \underline{\color{red}2} \\ \bar{4} & 0 & \bar{5} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{2} \\ \bar{4} & \underline{0} & \bar{5} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &= \{2\} \\ L &= \{(1, 3), (2, 2)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{3}} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \underline{\bar{3}} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \underline{\bar{6}} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{2\} \\ L &= \{(1, 3), (2, 2)\} \\ K \cap L &= \emptyset \end{aligned}$$
$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{\bar{4}} & \underline{\bar{2}} \\ \underline{\bar{4}} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{2\} \\ L &= \{(1, 3), (2, 2)\} \\ K \cap L &= \emptyset \end{aligned}$$

Příklady

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 5 & 4 \\ \underline{3} & 7 & 3 \\ \underline{4} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{5} & 4 \\ 3 & \underline{7} & 3 \\ \underline{4} & \underline{5} & 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1, 3\} \\ K &= \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 5 & \underline{4} \\ 3 & \underline{7} & \underline{3} \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 5 & \underline{4} \\ 3 & \underline{7} & 3 \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$L_1 = \{1, 3\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1, 3\} \\ K &= \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\} \\ L_1 &= \{1, 3\} \\ L_2 &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 5 & \underline{4} \\ \underline{3} & \underline{7} & \underline{3} \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & 4 & \underline{2} \\ \underline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1, 3\} \\ K &= \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\} \\ L_1 &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \underline{4} & \underline{2} \\ \underline{4} & \underline{0} & \underline{5} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &= \{1, 3\} \\ L_3 &= \{1, 3\} \\ L &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 5 & \underline{4} \\ \underline{3} & \underline{7} & \underline{3} \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} K_1 &= \{1, 3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1, 3\} \\ K &= \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\} \\ L_1 &= \{1, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & \bar{4} & \underline{2} \\ \bar{4} & \underline{0} & \bar{5} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L_2 &= \{1, 3\} \\ L_3 &= \{1, 3\} \\ L &= \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & 5 & \bar{4} \\ \underline{3} & \bar{7} & \underline{3} \\ \bar{4} & 5 & \bar{4} \end{pmatrix} \quad K \cap L = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

Smíšené strategie

Uvažujme konečnou hru v normálním tvaru

$$H = \{N, \{X_1, \dots, X_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}\}.$$

Koncept NE v ryzích strategiích je slabý – existují hry, pro které NE neexistují.

Připusťme, že se hráči mohou své strategie vybírat náhodně podle zvoleného pravděpodobnostního rozdělení, jejich výplatní funkce pak budou očekávané hodnoty výplat, tedy

- prostor strategií i -tého hráče pak má podobu $X_i^s = \{(x_i^1, \dots, x_i^{m_i})^\top : \sum_{j \in X_i} x_i^j = 1, x_i \geq 0\}$, a
- výplatní funkce i -tého hráče je

$$f_i^s = \sum_{k_1 \in X_1} \cdots \sum_{k_n \in X_n} f_i(x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}) \prod_{j \in N} x_j^{k_j}$$

Smíšené rozšíření konečné hry

Definice

Smíšené rozšíření konečné hry

$H = \{N, \{X_1, \dots, X_n\}, \{f_1, \dots, f_n\}\}$ je hra

$H^s = \{N, \{X_1^s, \dots, X_n^s\}, \{f_1^s, \dots, f_n^s\}\}$.

Věta

Každá konečná hra má NE ve svém smíšeném rozšíření.

Smíšené rozšíření maticové hry

Pro maticovou hru lze výplatní funkce smíšeného rozšíření zapsat jednodušeji:

$$f_i^s = \sum_{j \in X_1} \sum_{k \in X_2} x_1^j x_2^k a_{jk} = x_1^{T s} A x_2^s$$

Jde o to, že kombinace strategií (j, k) bude vybrána s pravděpodobností $p = x_1^j x_2^k$.

NE ve smíšeném rozšíření maticové hry

- Řekněme, že (x_1^{*s}, x_2^{*s}) jsou NE. Označme $v = f_1(x_1^{*s}, x_2^{*s})$.
- Hráč 2 se snaží chovat tak, aby v bylo minimální, pojdme najít x_2^{*s} tak, aby, ať hráč 1 udělá cokoli, ztratil hráč 2 vždy nejvýše v .
- Nelineární program níže vlevo zřejmě hledá požadované strategie x_2^s a minimální možné v . Linearizace viz vpravo.
- Z m_1 nerovností ve tvaru $Ax_2^s \leq v$ lze konvexní kombinací vytvořit nerovnost ve tvaru $x_1^{s\top} Ax_2^s \leq v$, pro všechny $x_1^s \in X_1^s$, tedy i tu nerovnost, jejíž levá strana je maximální.

$$\begin{aligned} & \min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} v \\ & \max_{x_1^s \in X_1^s} x_1^{s\top} Ax_2^s \leq v \\ & x_2^s \geq 0 \\ & 1^\top x_2^s = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} v \\ & Ax_2^s \leq v \\ & x_2^s \geq 0 \\ & 1^\top x_2^s = 1 \end{aligned}$$

„Lepší“ linearizace

Podobný lineární program lze sestavit i pro výpočet x_1^* . Tedy

$$\min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} v$$

$$Ax_2^s \leq v$$

$$x_2^s \geq 0$$

$$1^\top x_2^s = 1$$

$$\max_{x_1^s \in \mathbb{R}^{m_1}} v$$

$$A^\top x_1^s \geq v$$

$$x_1^s \geq 0$$

$$1^\top x_1^s = 1$$

Je-li zaručeno, že $v > 0$ (viz převody na nulový součet), lze zavést substituci $p = x_1^s/v$ a $q = x_2^s/v$. Po pár úpravách pak:

$$\max_{q \in \mathbb{R}^{m_2}} 1^\top q$$

$$Aq \leq 1$$

$$q \geq 0$$

$$\min_{p \in \mathbb{R}^{m_1}} 1^\top p$$

$$A^\top p \geq 1$$

$$p \geq 0$$

Tyto programy jsou zřejmě duální, při použití vhodného algoritmu stačí řešit jeden z nich (řešení druhého: stínové ceny).

Příklad

Maticová hra pro dva hráče je dána následující maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Rozhodněte, zda má tato hra sedlový bod.
- Najděte optimální strategie pro oba hráče.

Metoda fiktivní hry

- iterační metoda pro odhad NE v konečných hrách
- výhoda: jednoduchost
- nevýhoda: nemusí konvergovat
- myšlenka:
 - předpokládá se, že se hra donekonečna opakuje
 - každý hráč, řekněme hráč i , předpokládá, že hraje proti hráčům, kteří hrají stále stejné (smíšené) strategie
 - v j -tém opakování hry se tyto smíšené strategie odhadují napozorovanými relativními četnostmi jednotlivých ryzích strategií v předchozích $j - 1$ hrách
 - strategie hráče i v j -tém opakování hry je optimální reakce na odhadované smíšené strategie.
- konvergence pro:
 - konečné antagonistické hry
 - hry řešitelné vyškrtáním dominovaných strategií
 - aj.

Hra o dělitelné zakázky

- Situace:

- 2 hráči soupeří o l zakázek velikosti s_1, \dots, s_l .
- Soupeření má formu lobbingu: hráč 1 má k dispozici a prostředků na lobbing, hráč 2 disponuje prostředky o velikosti b .
- Hráči své disponibilní prostředky beze zbytku rozdělí mezi jednotlivé zakázky; každý hráč přidělí každé zakázce alespoň nějaké prostředky.
- Pokud hráč 1 lobuje pro zakázku 1 a_1 prostředky a hráč 2 b_1 prostředky, získá hráč 1 část zakázky 1 o velikosti $s_1 a_1 / (a_1 + b_1)$.

- Výplatní funkce a prostory strategií formálně:

$$X_1 = \{(a_1, \dots, a_l) : a_i > 0, \sum_{j=1}^l a_j = a\},$$

$$X_2 = \{(b_1, \dots, b_l) : b_i > 0, \sum_{j=1}^l b_j = b\},$$

$$f_1 = \sum_{j=1}^l \frac{s_j a_j}{a_j + b_j}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^l \frac{s_j b_j}{a_j + b_j}.$$

- Cíl:

- Jaká je optimální strategie?