4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hry s neúplnou informací – vybrané poznámky

Miroslav Rada

11. dubna 2022

Vysoká škola ekonomická v Praze

Co je to hra s neúplnou informací

Situace

- Každý hráč může být určitého *typu*, typ hráče je náhodná veličina.
- Na typu hráče může záviset jeho prostor strategií.
- Na typu hráče závisí jeho výplatní funkce.
- Každý hráč zná výplatní funkce a prostory strategií pro typy ostatních hráčů, kromě toho:
    - zná svůj typ,
    - nezná typy ostatních hráčů, a
    - zná sdruženou distribuci typů všech hráčů.

Důsledky

- Každý hráč chce hrát pro každý typ jiné strategie.
- Ekvilibrium tedy je *přiřazení strategií každému typu každého hráče*.

Ekvilibrium hry s neúplnou informací

Nástin řešení

- Hráči neví, jaké výplatní funkce mají protihráči. Znají jen podmíněné rozdělení typů protihráčů (podmíněné vlastním typem, který znají).
- Z pohledu konkrétního hráče (např. hráče i):
    - Ostatní hráči se chovají *náhodně*. Srovnejme se smíšeným rozšířením – tam je také chování protihráčů náhodné.
    - Každému typu hráče i je nutné přiřadit strategii, která má tu vlastnost, že se nevyplatí ji měnit – pro každý typ musí být zvolena strategie, která je best response vůči tomu náhodnému chování ostatních hráčů.
- Tedy:
    - Vlastní typ hráče se projevuje tak, že hráč chce uspokojovat každý typ zvlášť.
    - Cizí typy se projevují tak, že hráč neví, proti komu hraje a pozoruje to jako náhodné chování jednotlivých ostatních hráčů.

Formálně

Všem hráčům je známo:

- Množina $T = T_1 \times \cdots \times T_n$, kde T_i je množina typů pro hráče i.
- Množina $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, kde X_i je prostor strategií pro hráče i.
- Sdružené distribuce pravděpodobností $p(t_1, \dots, t_n)$ nad T.
- Výplatní funkce $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde $f_i : X \times T \to \mathbb{R}$ je výplatní funkce pro hráče i.

Hráči i je známo:

- Jeho vlastní typ $t_i \in T_i$, tedy i distribuce typů ostatních hráčů $p(t_{-i} \mid t_i)$.

Chceme (Bayesovo-Nashovo ekvilibrium):

- Pro každého hráče přiřazení $x_i^* : T_i \to X_i$, dohromady splňující pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\forall t_i \in T_i \;\; \forall x_i \in X_i \mid \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(x_i^*(t_i),\ x_{-i}^*(t_{-i}),\ t_i,\ t_{-i}) p(t_{-i} \mid t_i) \geq$$

$$\geq \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(x_i,\ x_{-i}^*(t_{-i}),\ t_i,\ t_{-i}) p(t_{-i} \mid t_i).$$

Poznámky a existence ekvilibria

- Množina typů nemusí být nutně konečná.
- Výplatní funkce hráče může záviset na typech všech hráčů, nejen na vlastním typu. Závisí-li jen na vlastním typu (tj. f_i je nezávislá na t_{-i}), říká se někdy, že hra má *private values*.
- Označení Bayesovské hry vychází z toho, že hráč i musí brát v úvahu podmíněnou distribuci typů ostatních hráčů.
- Model lze pochopitelně zobecnit na smíšené strategie.
- Věty o existenci ekvilibria jsou analogické klasickým hrám.

Ekvilibrium ve smíšených strategiích

Je dána hra (T, X, p, f). Jsou-li T a X konečné množiny, má hra Bayesovo-Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření.

Ekvilibrium v spojitém případě

Je dána hra (T, X, p, f). Jsou-li T a X kompaktní, f_i je spojitá a konkávní v x_i, má hra Bayesovo-Nashovo ekvilibrium (v ryzích strategiích).

Konečný případ – 2 hráči, každý 2 typy a 2 strategie

Situace (berme rovnou smíšené rozšíření):

- Jde vlastně o rozšíření bimaticové hry o rozměru 2×2.
- Nechť i, j indexují strategie a k, ℓ typy hráčů.
- Nechť x, y jsou (smíšená) strategie hráčů, X, Y prostory smíšených strategií.
- Je dáno:
  - $p_{k\ell}$ pro $k \in \{1, 2\}, \ell \in \{1, 2\}$ (tj. pro každou dvojici typů pravděpodobnost, že tato dvojice nastane),
  - 8 výplatních matic rozměru 2×2: pro $k \in \{1, 2\}, \ell \in \{1, 2\}$ matice $A^{k\ell}, B^{k\ell}$ (tj. pro každou dvojici typů výplatní matice každého z hráčů).
- Výplaty jsou: $f_1(x, y, k, \ell) = x^{\mathsf{T}} A^{k\ell} y$, $f_2(x, y, k, \ell) = x^{\mathsf{T}} B^{k\ell} y$.
- Ekvilibrium je čtveřice vektorů $(x^{1*}, x^{2*}, y^{1*}, y^{2*})$, musí splňovat:

$$\forall x \in X \mid {x^{1*}}^{\mathsf{T}}(p_{11}A^{11}y^{1*} + p_{12}A^{12}y^{2*}) \geq x^{\mathsf{T}}(p_{11}A^{11}y^{1*} + p_{12}A^{12}y^{2*})$$

$$\forall x \in X \mid {x^{2*}}^{\mathsf{T}}(p_{21}A^{21}y^{1*} + p_{22}A^{22}y^{2*}) \geq x^{\mathsf{T}}(p_{21}A^{21}y^{1*} + p_{22}A^{22}y^{2*})$$

$$\forall y \in Y \mid ({x^{1*}}^{\mathsf{T}}p_{11}B^{11} + {x^{2*}}^{\mathsf{T}}p_{21}B^{21})y^{1*} \geq ({x^{1*}}^{\mathsf{T}}p_{11}B^{11} + {x^{2*}}^{\mathsf{T}}p_{21}B^{21})y$$

$$\forall y \in Y \mid ({x^{1*}}^{\mathsf{T}}p_{12}B^{12} + {x^{2*}}^{\mathsf{T}}p_{22}B^{22})y^{2*} \geq ({x^{1*}}^{\mathsf{T}}p_{12}B^{12} + {x^{2*}}^{\mathsf{T}}p_{22}B^{22})y$$

Konečný případ – nalezení ekvilibria

Na předchozí hru se lze dívat jako na hru 4 hráčů, kde jsou ale poměrně jednoduché výplatní funkce (maximálně kvadratické). Ekvilibria se dají charakterizovat analogicky jako u bimaticových her. Z toho lze odvodit následující systém (který se dá zapsat jako kvadratický program analogický tomu pro bimaticové hry):

$$
\begin{aligned}
x^{1^\mathsf{T}}(p_{11}A^{11}y^1 + p_{12}A^{12}y^2) &= \alpha^1, & (x^{1^\mathsf{T}}p_{11}B^{11} + x^{2^\mathsf{T}}p_{21}B^{21})y^1 &= \beta^1,\\
x^{2^\mathsf{T}}(p_{21}A^{21}y^1 + p_{22}A^{22}y^2) &= \alpha^2, & (x^{1^\mathsf{T}}p_{12}B^{12} + x^{2^\mathsf{T}}p_{22}B^{22})y^2 &= \beta^2,\\
p_{11}A^{11}y^1 + p_{12}A^{12}y^2 &\leq \alpha^1\mathbf{1}, & p_{11}B^{11^\mathsf{T}}x^1 + p_{21}B^{21^\mathsf{T}}x^2 &\leq \beta^1\mathbf{1},\\
p_{21}A^{21}y^1 + p_{22}A^{22}y^2 &\leq \alpha^2\mathbf{1}, & p_{12}B^{12^\mathsf{T}}x^1 + p_{22}B^{22^\mathsf{T}}x^2 &\leq \beta^2\mathbf{1},\\
x^1 \in X, x^2 \in X, \alpha^1 \in \mathbb{R}, \alpha^2 &\in \mathbb{R}, & y^1 \in Y, y^2 \in Y, \beta^1 \in \mathbb{R}, \beta^2 &\in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$