4EK421 – oligopoly

1 Cournotův oligopol

Zadání. Mějme hru $((1,2,3),([0,k_1],[0,k_2],[0,k_3]),(f_1,f_2,f_3))$, kde

$$f_i(x_1,x_2,x_3) = x_i c(x_1,x_2,x_3) - (n_i + v_i x_i)$$

pro $i = 1,2,3$ a $c(x_1,x_2,x_3) = 6 - 0.5(x_1+x_2+x_3)$. Parametry k, v, n pro jednotlivé hráče udává následující tabulka.

i	n_i	v_i	k_i
1	3	0.5	6
2	2	0.75	3
3	1	2.5	2

Předpokládejme, že hráči nespolupracují. Nalezněme NE.

Interpretace zadání. Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu. Hráč i má kapacitu výroby k_i, fixní náklady n_i, variabilní náklady v_i; funkce f_i je jeho zisková funkce, skládající se z příjmů z prodeje a nákladů. Funkce c je cena, závisející na celkovém vyrobeném množství.

Idea hledání NE. NE je taková trojice přípustných výrobních množství (x_1^*, x_2^*, x_3^*), že pro každé $i = 1,2,3$ a každé $x_i \in [0,k_i]$ platí

$$f_i(x_1*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_3^*) \leq f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*).$$

Pro pevné i nerovnost říká, že i-tý hráč nemůže dosáhnout lepší výplaty, pokud se odchýlí od množství x_i^*. Jednotlivé hodnoty $f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ tedy musí být maximální v následujícím smyslu:

$$\max_{x_1\in[0,k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$
$$\max_{x_2\in[0,k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*) = f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$
$$\max_{x_3\in[0,k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3) = f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

Každá z rovností, řekněme i-tá, tedy předepisuje hodnotu maxima funkce jedné proměnné x_i na prostoru strategí i-tého hráče. Vyhovující (x_1^*, x_2^*, x_3^*) lze tedy získat řešením následující soustavy rovností

$$\begin{aligned} x_1^* &= \arg\max_{x_1 \in [0,k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*), \\ x_2^* &= \arg\max_{x_2 \in [0,k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*), \\ x_3^* &= \arg\max_{x_3 \in [0,k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Vlastnosti funkcí f_i ve vztahu k řešení soustavy (1). Soustavu ve tvaru (1) by při zcela obecných funkcích f_1, f_2, f_3 mohlo být těžké vyřešit. V našem případě však lze využít toho, že funkce f_i je v proměnné x_i (při fixních x_j pro $j \neq i$) kvadratická a konkávní. Konkávnost lze snadno ověřit výpočtem druhé derivace podle x_i (ověření jednotlivých kroků výpočtu ponecháváme na laskavém čtenáři):

$$\begin{aligned} f_i &= -0.5x_i^2 + (6 - v_i - 0.5\sum_{j \neq i} x_j)x_i - n_i, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} &= -x_i + 6 - v_i - 0.5\sum_{j \neq i} x_j, \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} &= -1. \end{aligned}$$

Konkávní kvadratická funkce f jedné proměnné x má v $\mathbb{R}$ právě jedno maximum, a to pro takové x_0, pro které je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$. Tento poznatek však nelze pro řešení soustavy (1) použít přímo, protože se zde maxima hledají pouze na intervalech určených povolenými výrobními množstvími jednotlivých hráčů, nikoli v celém $\mathbb{R}$.

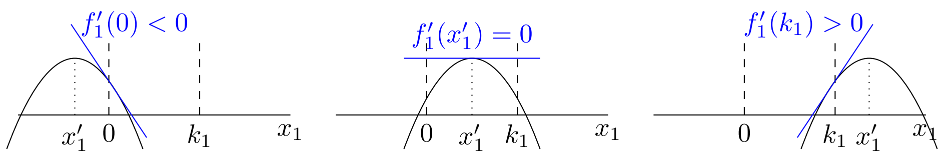
Uvažujme nyní f_1. Pro pevně zvolené $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mohou ve vztahu k poloze $x_1' = \arg\max_{x_1 \in \mathbb{R}} f_1(x_1, x_2, x_3)$ vůči intervalu $[0, k_1]$ nastat tři případy:

1. $x_1' < 0$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0$,

2. $x_1' \in [0, k_i]$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1') = 0$, nebo

3. $x_1' > k_1$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0$.

Ilustrace jednotlivých případů následuje.



Pokud tedy $x_1' < 0$, pro hráče 1 je (při zafixovaných strategiích x_2, x_3) optimální strategií $x_1 = 0$, pokud $x_1' > 0$, je pro hráče 1 optimální $x_1 = k_1$.

Řešení soustavy (1). Z diskuze výše je zřejmé, že každou rovnici soustavy (1), řekněmě první rovnici, lze přepsat takto:

$$x_1^* = \underset{x_1 \in [0,k_1]}{\arg\max} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0, \\ k_1, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0, \\ x_1', & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2}$$

Zápis (2) otevírá prostor ke zformulování soustavy (1) jako soustavy nelineárních (ne)rovností, která bude řešitelná pomocí běžných solverů. Nejprve soustavu zformulujme a pak vysvětleme, proč je její řešení řešením soustavy (1).

$$\forall i = 1,2,3: \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \le x_i \le k_i, \\ 0 = x_i z_i, & 0 \le y_i, \\ 0 = (k_i - x_i) y_i, & 0 \le z_i \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Mohlo by se zdát, že sady (ne)rovností pro jednotlivá i jsou na sobě nezávislé. Tomu tak pochopitelně není: v derivacích f_i podle x_i se vyskytují všechny proměnné x_1, x_2, x_3.

Nejdůležitějšími rovnostmi soustavy (3) jsou zřejmě rovnosti $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i$, které v kombinaci s ostatními rovnostmi kladou jistý požadavek na derivace jednotlivých funkcí f_i. Jak ale tento požadavek přesně vypadá? Ve skutečnosti vcelku přesně odpovídá rovnici (2). V soustavě jsou pro každé i zavedeny nezáporné proměnné y_i a z_i. Omezení $x_i z_i = 0$ resp. $(k_i - x_i) y_i = 0$ zaručují, že z_i resp. y_i bude moci být nenulové jen tehdy, pokud $x_i = 0$ resp. $x_i = k_i$. Tedy, pokud $x_i = 0$ resp. $x_i = k_i$, pak nenulové z_i resp. y_i v souladu s (2) povoluje, aby $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ resp. > 0. Ve všech ostatních případech, tedy pokud $0 < x_i < k_i$, rovnice vynucují, aby $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$.

Zopakujme nyní ještě pro jistotu, proč je řešení (x_1^*, x_2^*, x_3^*) soustavy (3) zároveň také řešením soustavy (1) a tím i Nashovým ekvilibriem. Podívejme se na libovolné x_i^*. Pokud

- $x_i^* = 0$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \le 0$; ke zlepšení hodnoty f_i by proto mohlo dojít pouze při snížování x_i^*, to ale lze pouze zvyšovat, což se nevyplatí,
- $x_i^* = k_i$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \ge 0$; ke zlepšení hodnoty f_i by proto mohlo dojít pouze při zvyšování x_i^*, to ale lze pouze snižovat, což se nevyplatí,
- $0 < x_i^* < k_i$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) = 0$ a x_i^* se proto nevyplatí měnit.

Optimalizační verze. Soustava (3) obsahuje nelineární omezení, což může její řešení solverům zkomplikovat (byť je alespoň teoreticky možné). Může proto být výhodné přesunout tato omezení do účelové funkce.

Nelineární omezení jsou dvou typů: $x_i z_i = 0$ a $(k_i - x_i) y_i = 0$. Všimněme si, že na všechny činitele, které se v nelineárních omezeních vyskytují, jsou jinými omezeními kladeny požadavky na nezápornost. Nezáporné jsou tedy jistě všechny jejich součiny. To otevírá možnost místo soustavy (3) řešit optimalizační úlohu

$$\text{minimalizovat} \sum_{i=1}^{3} x_i z_i + (k_i - x_i) y_i$$

$$\text{vzhledem k } \forall i = 1,2,3 : \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \le z_i \\ 0 \le x_i \le k_i, & 0 \le y_i, \end{pmatrix}.$$

Zřejmě, optimální hodnota úlohy je 0, které účelová funkce nabývá právě pro ta přípustná řešení, která jsou řešeními soustavy (3).

Řešení úlohy solverem. Zbylou část práce, tj. použít nějaké vhodný solver na konkrétní data, si ponechejme jako cvičení.

2 Stackelbergův oligopol

Zadání Uvažujme situaci z předchozího případu. Jaké bude NE, půjde-li o Stackelbergův oligopol, kde buď

1. bude hráč 3 vůdce, hráč 2 následník a hráč 1 se hry nebude účastnit, nebo
2. bude hráč 3 vůdce a hráči 1,2 budou následníci, nebo
3. bude hráč 3 vůdce z pohledu obou hráčů a hráč 2 bude vůdce z pohledu hráče 1.