

# 4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Maticové hry a hry s konstantním součtem obecně

---

MIROSLAV RADA

26. září 2023

Vysoká škola ekonomická v Praze

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznam prostorů strategií  $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$ ,
  - $X := X_1 \times \dots \times X_n$ .

Trojice  $(N, X, f)$  je **hra v normálním tvaru**.

- $x_i \in X_i$  – **strategie**  $i$ -tého hráče
- $(x_1, \dots, x_n) \in X$  – strategie všech hráčů, **strategický profil** nebo **kombinace strategií**

## Co považovat za řešení?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

### Nashovo equilibrium

**Nashovo equilibrium** je taková kombinace strategií  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ , že pro každého hráče, řekněme  $i$ -tého, platí, že pro všechna  $x_i \in X_i$  je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$  budeme značit  $(x_i, x_{-i}^*)$

Podle definice Nashova ekvilibria je  $x^*$  ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna  $i$  (tj. pro každého hráče) platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat  $x_i^*$  v závislosti na  $x_{-i}$ . Definujme tzv. *best-response funkci*  $i$ -tého hráče, značenou  $g_i$ . Zřejmě  $g_i : X_{-i} \rightarrow 2^{X_i}$ :

$$g_i(x_{-i}) := \{x_i \in X_i : f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_{-i})\}.$$

Zřejmě,  $x^*$  je Nashovo ekvilibrium, pokud  $x_i^* \in g_i(x_{-i})$  pro všechna  $i \in N$ .

## Konstantní součet

---

# Hra s konstantním součtem v normálním tvaru

**Hra s konstantním součtem** je hra v normálním tvaru  $H = (N, S, V)$  zadaná

- seznamem hráčů  $N := (1, \dots, n)$ ,
- seznamem prostorů strategií –  $S := (X_1, \dots, X_n)$  a
- seznamem výplatních funkcí  $V := (f_1, \dots, f_n)$ , kde
  - pro  $i \in N$  je  $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$ ,
  - $X := X_1 \times \dots \times X_n$  a
  - $\sum_{i \in N} f_i = k$  pro nějaké  $k \in \mathbb{R}$ .

Budeme se zabývat hledáním Nashových ekvilibrií pro tyto hry.

## Převod na hru s nulovým součtem

Mějme hru  $H = (N, S, f_1, \dots, f_n)$ . Definujme  $f'_1(x) = f_1(x) - \kappa$ .

Uvažujme hru  $H' = (N, S, (f'_1, f_2, \dots, f_n))$ .

### Tvrzení

*Strategický profil  $x^* \in X$  je NE hry  $H$ , právě když tento profil je NE hry  $H'$ .*

Ke  $x^* \in X, i \in N, \xi \in X_i$  uvažujme strategii  $(\xi, x_{-i}^*) := (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \xi, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ .

Jakýkoli strategický profil  $x^* \in X$  splňující  $f_i(x^*) \geq f_i((\xi, x_{-i}^*))$  pro  $i \in N$  splňuje i

$f'_1(x^*) \geq f'_1((\xi, x_{-i}^*))$ , neboť posledně jmenovaná nerovnost lze přičtením  $\kappa$  převést na dříve jmenovanou. Opak analogicky.

### Důsledek

*Při hledání NE lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $\kappa = 0$ :*

O hrách  $H$  a  $H'$  hovoříme jako o **strategicky ekvivalentních**.

## Dva hráči a konstantní součet – antagonistická hra

- Hra s konstantním součtem s  $n = 2$  se nazývá **antagonistická hra**. Situaci usnadňuje absolutní protichůdnost zájmů hráčů: pokud  $\kappa = 0$ , pak to, co jeden vyhraje, druhý ztratí.
- Lze tedy psát  $H = ((1, 2), (X_1, X_2), (f_1, -f_1))$ .
- Definiční nerovnosti Nashovy rovnováhy se pak zapíší jako

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, x_2^*) &\geq f_1(x_1, x_2^*), \\ -f_1(x_1^*, x_2^*) &\geq -f_1(x_1^*, x_2) \Leftrightarrow f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2), \end{aligned}$$

nebo také

$$f_1(x_1, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2) \quad \text{pro všechna } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

# Maticové hry

---

## Konečná antagonistická hra – maticová hra

- Antagonistická hra, ve které mají oba hráči konečný počet strategií, se nazývá **maticová hra**. Jde o to, že výplatní funkce v takové hře se dá sledovat v matici, a taková matice pak hru plně popisuje:

$$H = ((1, 2), (\{1, \dots, m_1\}, \{1, \dots, m_2\}), (f_1(i, j) = A_{ij}, f_2 = -f_1)),$$

kde  $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ . Předpokládáme tak, že strategie hráče 1 resp. 2 odpovídají řádkům resp. sloupcům matice  $A$ .

- Zřejmě, každá matice popisuje maticovou hru.
- Dvojice  $(k, \ell)$  je NE (**v ryzích strategiích**) v maticové hře, pokud pro všechna  $i \in X_1$  a  $j \in X_2$  platí  $A_{i\ell} \leq A_{k\ell} \leq A_{kj}$ .
- Prvek  $A_{k\ell}$  matice  $A$  splňující podmínku výše se nazývá **sedlový bod**; je to největší prvek ve sloupci  $\ell$  a nejmenší prvek v řádku  $k$ .
- Problém: sedlový bod nemusí existovat.

# Hledání NE v ryzích strategiích

Idea: najít zvlášť taková  $(k, \ell)$ , že  $A_{i\ell} \leq A_{k\ell}$  a zvlášť  $(k, \ell)$  vyhovující  $A_{k\ell} \leq A_{kj}$ , tj. najít takové dvojice strategií, u kterých by si nemohl při odchýlení polepšit hráč 1 resp. 2.

1. Pro každou strategii  $\ell$  hráče 2 najdeme množinu  $K_\ell = \arg \max_{k \in X_1} A_{k\ell}$  strategií hráče 1, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii  $\ell$  hráče 2. Snadno získáme množinu  $K$  dvojic strategií  $(k, \ell)$ ,  $k \in K_\ell$ ,  $\ell \in X_2$ , splňující  $A_{i\ell} \leq A_{k\ell}$  pro všechna  $i \in X_1$ .
2. Pro každou strategii  $k$  hráče 1 najdeme množinu  $L_k = \arg \min_{\ell \in X_2} A_{k\ell}$  strategií hráče 2, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii  $k$  hráče 1. Snadno získáme množinu  $L$  dvojic strategií  $(k, \ell)$ ,  $\ell \in L_k$ ,  $k \in X_1$ , splňující  $A_{kj} \geq A_{k\ell}$  pro všechna  $j \in X_2$ .
3. Množina všech NE je množina všech  $(k, \ell)$  takových, že jsou zároveň v  $K$  i v  $L$ .

Jde vlastně o vyčíslování best-response funkce. Je možné proto, že jsou prostory strategií konečné.

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & 2 \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & 2 \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$K_3 = \{1\}$$

$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & 1 \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$K_3 = \{1\}$$

$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{2} & \bar{1} \\ 0 & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$K_3 = \{1\}$$

$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$L_2 = \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$K_3 = \{1\}$$

$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$L_2 = \{3\}$$

$$L_3 = \{1\}$$

$$L = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$K_2 = \{3\}$$

$$K_3 = \{1\}$$

$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$L_2 = \{3\}$$

$$L_3 = \{1\}$$

$$L = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$

$$K \cap L = \{(1, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ \bar{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & 2 \\ \bar{4} & \underline{0} & 5 \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$K_3 = \{2\}$$

$$K = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \color{red}2 \\ \bar{4} & 0 & \color{red}\bar{5} \end{pmatrix}$$

## Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$K_3 = \{2\}$$

$$K = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{3} & \bar{4} & \color{red}{\underline{\bar{2}}} \\ \bar{4} & 0 & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$K_3 = \{2\}$$

$$K = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$L_2 = \{2\}$$

$$L = \{(1, 3), (2, 2)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$K_3 = \{2\}$$

$$K = \{(2, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & 0 & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{3\}$$

$$L_2 = \{2\}$$

$$L = \{(1, 3), (2, 2)\}$$

$$K \cap L = \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & 5 & 4 \\ \bar{3} & 7 & 3 \\ \bar{4} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \bar{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \mathbf{5} & 4 \\ 3 & \mathbf{\bar{7}} & 3 \\ \bar{4} & \mathbf{5} & 4 \end{pmatrix}$$

# Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & 5 & \bar{4} \\ 3 & \bar{7} & \bar{3} \\ \bar{4} & 5 & \bar{4} \end{pmatrix}$$

# Příklady

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{4}} & \bar{5} & \underline{\bar{4}} \\ 3 & \bar{7} & 3 \\ \bar{4} & 5 & \bar{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{1, 3\}$$

$$L_2 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & 5 & \bar{4} \\ \underline{\bar{3}} & \underline{\bar{7}} & \underline{\bar{3}} \\ \bar{4} & 5 & \bar{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \bar{2} \\ \bar{3} & 2 & \bar{1} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ \bar{4} & \underline{0} & \bar{5} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{1, 3\}$$

$$L_2 = \{1, 3\}$$

$$L_3 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & 5 & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{7} & \bar{3} \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

$$L = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & 4 & \underline{\bar{2}} \\ \bar{3} & 2 & \underline{\bar{1}} \\ \underline{0} & \bar{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$K_2 = \{2\}$$

$$K_3 = \{1, 3\}$$

$$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{4} & \underline{\bar{2}} \\ \bar{4} & \underline{0} & \underline{\bar{5}} \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \{1, 3\}$$

$$L_2 = \{1, 3\}$$

$$L_3 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\bar{4}} & 5 & \underline{\bar{4}} \\ \underline{\bar{3}} & \bar{7} & \underline{\bar{3}} \\ \underline{\bar{4}} & 5 & \underline{\bar{4}} \end{pmatrix}$$

$$L = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

$$K \cap L = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$$

# Smíšené strategie

---

# Smíšené strategie

Uvažujme konečnou hru v normálním tvaru  $H = (N, (X_1, \dots, X_n), (f_1, \dots, f_n))$ .

Koncept NE v ryzích strategiích je slabý – existují hry, pro které NE neexistují.

Připusťme, že se hráči mohou své strategie vybírat náhodně podle zvoleného pravděpodobnostního rozdělení, jejich výplatní funkce pak budou očekávané hodnoty výplat, tedy

- prostor strategií  $i$ -tého hráče pak má podobu  $X_i^S = \{(x_i^1, \dots, x_i^{m_i})^T : \sum_{k \in X_i} x_i^k = 1, x_i \geq 0\}$ ,  
a
- výplatní funkce  $i$ -tého hráče je

$$f_i^S = \sum_{k_1 \in X_1} \dots \sum_{k_n \in X_n} f_i(x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}) \prod_{j \in N} x_j^{k_j}$$

## Definice

**Smíšené rozšíření** konečné hry  $H = (N, (X_1, \dots, X_n), (f_1, \dots, f_n))$  je hra  $H^S = (N, (X_1^S, \dots, X_n^S), (f_1^S, \dots, f_n^S))$ .

## Věta

*Každá konečná hra má NE ve svém smíšeném rozšíření.*

Pro maticovou hru lze výplatní funkce smíšeného rozšíření zapsat jednodušeji:

$$f_i^S = \sum_{k \in X_1} \sum_{\ell \in X_2} x_1^k x_2^\ell a_{k\ell} = x_1^{TS} A x_2^S$$

Jde o to, že kombinace strategií  $(k, \ell)$  bude vybrána s pravděpodobností  $p = x_1^k x_2^\ell$ .

## NE ve smíšeném rozšíření maticové hry

- Prostory strategií nejsou konečné, nelze zkoušet všechny možnosti.
- Necht' je  $v$  je výhra hráče 1.
- Hráč 2 se snaží chovat tak, aby  $v$  bylo minimální, pojdme najít  $x_2^{*S}$  a  $v$  tak, aby, ať hráč 1 udělá cokoli, ztratil hráč 2 vždy nejvýše  $v$ .
- Nelineární program níže vlevo zřejmě hledá požadované strategie  $x_2^S$  a minimální možné  $v$ .
- Linearizace vpravo. Proč je množina optimálních řešení stejná? Nerovnost  $x_1^{ST}Ax_2^S \leq v$  lze pro každé  $x_1^S \in X_1^S$  vytvořit jako konvexní kombinaci  $m_1$  nerovností ve tvaru  $Ax_2^S \leq v\mathbf{1}$ . Speciálně lze vytvořit i i tu nerovnost, jejíž levá strana je maximální.

$$\begin{aligned} \min_{x_2^S \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ \max_{x_1^S \in X_1^S} \quad & x_1^{ST}Ax_2^S \leq v \\ & x_2^S \geq 0 \\ & \mathbf{1}^T x_2^S = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_2^S \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ & Ax_2^S \leq v\mathbf{1} \\ & x_2^S \geq 0 \\ & \mathbf{1}^T x_2^S = 1 \end{aligned}$$

# Viditelně duální programy

Podobný lineární program lze sestavit i pro výpočet  $x_1^*$ . Tedy

$$\begin{aligned} \min_{x_2^S \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ \text{Ax}_2^S & \leq v\mathbf{1} \\ x_2^S & \geq 0 \\ \mathbf{1}^T x_2^S & = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x_1^S \in \mathbb{R}^{m_1}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ A^T x_1^S & \geq v\mathbf{1} \\ x_1^S & \geq 0 \\ \mathbf{1}^T x_1^S & = 1 \end{aligned}$$

Je-li zaručeno, že  $v > 0$  (viz převody na nulový součet), lze zavést substituci  $p = x_1^S/v$  a  $q = x_2^S/v$ . Po pár úpravách pak:

$$\begin{aligned} \max_{q \in \mathbb{R}^{m_2}} \quad & \mathbf{1}^T q \\ Aq & \leq \mathbf{1} \\ q & \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^{m_1}} \quad & \mathbf{1}^T p \\ A^T p & \geq \mathbf{1} \\ p & \geq 0 \end{aligned}$$

Tyto programy jsou zřejmě duální, při použití vhodného algoritmu stačí řešit jeden z nich (řešení druhého: stínové ceny). Méně očividné: horní programy jsou též duální.

Maticová hra pro dva hráče je dána následující maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Rozhodněte, zda má tato hra sedlový bod.
- Najděte NE.

## (Bonusové) otázky k vlastnostem NE v maticových hrách

### Unikátnost výplaty

- Víme, že NE nemusí být unikátní ani v případě, že připouštíme pouze ryzí strategie. Jak je to ale s hodnotou výplaty? Můžou existovat dvě různá NE  $(k_1, \ell_1)$  a  $(k_2, \ell_2)$  taková, že zároveň  $f_1(k_1, \ell_1) \neq f_1(k_2, \ell_2)$ ?
- A jak je to v případě smíšeného rozšíření – mohou existovat ekvilibria s různými hodnotami výplatních funkcí tam?

### Identifikace nejednoznačnosti

- V ryzích strategiích je jasné, kdy existuje více NE. Jak to poznat ve smíšeném rozšíření?
- Jak popsat množinu všech NE ve smíšeném rozšíření? Jak může být složitá?

# Metoda fiktivní hry

---

# Metoda fiktivní hry

- iterační metoda pro odhad NE v konečných hrách
- výhoda: jednoduchost
- nevýhoda: nemusí konvergovat
- myšlenka:
  - předpokládá se, že se hra donekonečna opakuje
  - každý hráč, řekněme hráč  $i$ , předpokládá, že hraje proti hráčům, kteří hrají stále stejné (smíšené) strategie
  - v  $j$ -tém opakování hry se tyto smíšené strategie odhadují napozorovanými relativními četnostmi jednotlivých ryzích strategií v předchozích  $j - 1$  hrách
  - strategie hráče  $i$  v  $j$ -tém opakování hry je optimální reakce na odhadované smíšené strategie.
- konvergence pro:
  - konečné antagonistické hry
  - hry řešitelné vyškrtáním dominovaných strategií
  - aj.

## Bonusová hra – o dělitelné zakázky

- Situace:
  - 2 hráči soupeří o  $l$  zakázek velikosti  $s_1, \dots, s_l$ .
  - Soupeření má formu lobbingu: hráč 1 má k dispozici  $a$  prostředků na lobbing, hráč 2 disponuje prostředky o velikosti  $b$ .
  - Hráči své disponibilní prostředky beze zbytku rozdělí mezi jednotlivé zakázky; každý hráč přidělí každé zakázce alespoň nějaké prostředky.
  - Pokud hráč 1 lobuje pro zakázku 1  $a_1$  prostředky a hráč 2  $b_1$  prostředky, získá hráč 1 část zakázky 1 o velikosti  $s_1 a_1 / (a_1 + b_1)$ .

- Výplatní funkce a prostory strategií formálně:

$$X_1 = \{(a_1, \dots, a_l) : a_i > 0, \sum_{j=1}^l a_j = a\},$$

$$X_2 = \{(b_1, \dots, b_l) : b_i > 0, \sum_{j=1}^l b_j = b\},$$

$$f_1 = \sum_{j=1}^l \frac{s_j a_j}{a_j + b_j}, \quad f_2 = \sum_{j=1}^l \frac{s_j b_j}{a_j + b_j}.$$

- Cíl:
  - Jaké je ve hře NE?