

4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hry s neúplnou informací – vybrané poznámky

MIROSLAV RADA

15. dubna 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

Co je to hra s neúplnou informací

Situace

- Každý hráč může být určitého *typu*, typ hráče je náhodná veličina.
- Na typu hráče může záviset jeho prostor strategií.
- Na typu hráče závisí jeho výplatní funkce.
- Každý hráč zná výplatní funkce a prostory strategií pro typy ostatních hráčů, kromě toho:
 - zná svůj typ,
 - nezná typy ostatních hráčů, a
 - zná sdruženou distribuci typů všech hráčů.

Důsledky

- Každý hráč chce hrát pro každý typ jiné strategie.
- Ekvilibrum tedy je *přiřazení strategií každému typu každého hráče*.

Nástin řešení

- Hráči neví, jaké výplatní funkce mají protihráči. Znají jen podmíněné rozdělení typů protihráčů (podmíněné vlastním typem, který znají).
- Z pohledu konkrétního hráče (např. hráče i):
 - Ostatní hráči se chovají *náhodně*. Srovnáme se smíšeným rozšířením – tam je také chování protihráčů náhodné.
 - Každému typu hráče i je nutné přiřadit strategii, která má tu vlastnost, že se nevyplatí ji měnit – pro každý typ musí být zvolena strategie, která je best response vůči tomu náhodnému chování ostatních hráčů.
- Tedy:
 - Vlastní typ hráče se projevuje tak, že hráč chce uspokojovat každý typ zvlášť.
 - Cizí typy se projevují tak, že hráč neví, proti komu hraje a pozoruje to jako náhodné chování jednotlivých ostatních hráčů.

Všem hráčům je známo:

- Množina $T = T_1 \times \dots \times T_n$, kde T_i je množina typů pro hráče i .
- Množina $X = X_1 \times \dots \times X_n$, kde X_i je prostor strategií pro hráče i .
- Sdružené distribuce pravděpodobností $p(t_1, \dots, t_n)$ nad T .
- Výplatní funkce $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde $f_i: X \times T \rightarrow \mathbb{R}$ je výplatní funkce pro hráče i .

Hráči i je známo:

- Jeho vlastní typ $t_i \in T_i$, tedy i distribuce typů ostatních hráčů $p(t_{-i} | t_i)$.

Chceme (Bayesovo-Nashovo ekvilíbrio):

- Pro každého hráče přiřazení $x_i^*: T_i \rightarrow X_i$, dohromady splňující pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \forall t_i \in T_i \quad \forall x_i \in X_i \quad & \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(x_i^*(t_i), x_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) p(t_{-i} | t_i) \geq \\ & \geq \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i}) p(t_{-i} | t_i). \end{aligned}$$

Poznámky a existence ekvilibria

- Množina typů nemusí být nutně konečná.
- Výplatní funkce hráče může záviset na typech všech hráčů, nejen na vlastním typu. Závisí-li jen na vlastním typu (tj. f_i je nezávislá na t_{-i}), říká se někdy, že hra má *private values*.
- Označení Bayesovské hry vychází z toho, že hráč i musí brát v úvahu podmíněnou distribuci typů ostatních hráčů.
- Model lze pochopitelně zobecnit na smíšené strategie.
- Věty o existenci ekvilibria jsou analogické klasickým hrám.

Ekvilibrium ve smíšených strategiích

Je dána hra (T, X, p, f) . Jsou-li T a X konečné množiny, má hra Bayesovo-Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření.

Ekvilibrium v spojitém případě

Je dána hra (T, X, p, f) . Jsou-li T a X kompaktní, f_i je spojitá a konkávní v x_i , má hra Bayesovo-Nashovo ekvilibrium (v ryzích strategiích).

Konečný případ – 2 hráči, každý 2 typy a 2 strategie

Situace (berme rovnou smíšené rozšíření):

- Jde vlastně o rozšíření bimaticové hry o rozměru 2×2 .
- Necht i, j indexují strategie a k, ℓ typy hráčů.
- Necht x, y jsou (smíšená) strategie hráčů, X, Y prostory smíšených strategií.
- Je dáno:
 - $p_{k\ell}$ pro $k \in \{1, 2\}, \ell \in \{1, 2\}$ (tj. pro každou dvojici typů pravděpodobnost, že tato dvojice nastane),
 - 8 výplatních matic rozměru 2×2 : pro $k \in \{1, 2\}, \ell \in \{1, 2\}$ matice $A^{k\ell}, B^{k\ell}$ (tj. pro každou dvojici typů výplatní matice každého z hráčů).
- Výplaty jsou: $f_1(x, y, k, \ell) = x^T A^{k\ell} y$, $f_2(x, y, k, \ell) = x^T B^{k\ell} y$.
- Ekvilibrium je čtveřice vektorů $(x^{1*}, x^{2*}, y^{1*}, y^{2*})$, musí splňovat:

$$\forall x \in X \mid x^{1*T}(p_{11}A^{11}y^{1*} + p_{12}A^{12}y^{2*}) \geq x^T(p_{11}A^{11}y^{1*} + p_{12}A^{12}y^{2*})$$

$$\forall x \in X \mid x^{2*T}(p_{21}A^{21}y^{1*} + p_{22}A^{22}y^{2*}) \geq x^T(p_{21}A^{21}y^{1*} + p_{22}A^{22}y^{2*})$$

$$\forall y \in Y \mid (x^{1*T}p_{11}B^{11} + x^{2*T}p_{21}B^{21})y^{1*} \geq (x^{1*T}p_{11}B^{11} + x^{2*T}p_{21}B^{21})y$$

$$\forall y \in Y \mid (x^{1*T}p_{12}B^{12} + x^{2*T}p_{22}B^{22})y^{2*} \geq (x^{1*T}p_{12}B^{12} + x^{2*T}p_{22}B^{22})y$$

Konečný případ – nalezení ekvilibria

Na předchozí hru se lze dívat jako na hru 4 hráčů, kde jsou ale poměrně jednoduché výplatní funkce (maximálně kvadratické). Ekvilibria se dají charakterizovat analogicky jako u bimaticových her. Z toho lze odvodit následující systém (který se dá zapsat jako kvadratický program analogický tomu pro bimaticové hry):

$$x^{1T}(p_{11}A^{11}y^1 + p_{12}A^{12}y^2) = \alpha^1,$$

$$x^{2T}(p_{21}A^{21}y^1 + p_{22}A^{22}y^2) = \alpha^2,$$

$$p_{11}A^{11}y^1 + p_{12}A^{12}y^2 \leq \alpha^1 \mathbf{1},$$

$$p_{21}A^{21}y^1 + p_{22}A^{22}y^2 \leq \alpha^2 \mathbf{1},$$

$$x^1 \in X, x^2 \in X, \alpha^1 \in \mathbb{R}, \alpha^2 \in \mathbb{R},$$

$$(x^{1T}p_{11}B^{11} + x^{2T}p_{21}B^{21})y^1 = \beta^1,$$

$$(x^{1T}p_{12}B^{12} + x^{2T}p_{22}B^{22})y^2 = \beta^2,$$

$$p_{11}B^{11T}x^1 + p_{21}B^{21T}x^2 \leq \beta^1 \mathbf{1},$$

$$p_{12}B^{12T}x^1 + p_{22}B^{22T}x^2 \leq \beta^2 \mathbf{1},$$

$$y^1 \in Y, y^2 \in Y, \beta^1 \in \mathbb{R}, \beta^2 \in \mathbb{R}.$$