4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Opakované hry

Miroslav Rada

25. března 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

Model opakované hry

Model opakované hry

Motivace:

- v mnoha situacích se hry hrají opakovaně
- opakování může vést ke kooperaci nebo k naučení soupeřovy strategie

Situace:

- Je dána (konečná) hra v normálním tvaru $H = ((1,2),(A_1,A_2),(f_1,f_2))$.
- Hráči hru $T+1$-krát hrají (T obecně nemusí být známé, případně $T=\infty$)
- Budoucí výplaty se diskontují faktorem $\delta < 1$.

Značení:

- a_i^t – strategie, kterou hráč i zvolí v čase t
- $a^t := (a_1^t, a_2^t)$; $a := (a^0, \dots, a^T)$
- $F_i(a) := (1-\delta)\sum_{t=0}^{T} \delta^t f_i(a^t)$ – výplata hráče i
- $H^T(\delta)$ – opakovaná hra s H, δ a T.

Vězňovo dilema – modelový příklad

Klasické vězňovo dilema

Mějme klasické vězňovo dilema s maticí

	Spolupráce	Zrada
Spolupráce	1; 1	-1; 2
Zrada	2; -1	0; 0

Nashovo ekvilibrium

- jediné: (Z, Z) s výplatami $(0, 0)$
- strategie S je dominovaná (pro oba hráče)

Konečný počet opakování

Situace se známým $T < \infty$

Idea – zpětná indukce a dokonalá rovnováha podhry

- V čase T se hráči chovají podle NE – hrají (Z,Z)
- v čase $T - 1$ vědí, že v následující hře budou hrát (Z,Z), nepřipadá tedy v úvahu žádný „trest“. Na jejich akci tedy hra v následujícím kole nezávisí $\Rightarrow$ opět hrají NE.
- indukcí až do času 0...

Věta

Uvažujme opakovanou hru $H^T(\delta)$ pro $T < \infty$. Má-li hra H jediné NE, označme jej a^*, má hra $H^T(\delta)$ unikátní ekvilibrium, ve kterém $a = (a^*, \dots, a^*)$.

Nekonečný počet opakování

Nekonečné nebo neznámé T

Implicitně dohodnutá strategie

- Předpokládejme, že existuje „dobrá“ kombinace strategií, která sice není NE, ale hráči mají motivaci ji hrát
- Navíc existuje strategie, kterou mohou hráči hrát jako „trest“
- Ve vězňově dilematu:
  - dobré strategie: (S, S) (výplata 1; 1)
  - trest: volba strategie Z (výplata –1 nebo 0 pro trestaného hráče)

Různé strategie

- Vždy podvádějte (Always defect): $a_i^t = \mathrm{Z} \quad \forall t = 0, \dots, T$
- Vždy spoupracujte (Always cooperate): $a_i^t = \mathrm{S} \quad \forall t = 0, \dots, T$
- Neomezená odplata (Grim trigger)

$$a_i^t = \begin{cases} \mathrm{Z} & \text{pokud } \exists t' \in \{0, \dots, t-1\} \mid a_j^{t'} = \mathrm{Z}, \\ \mathrm{S} & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Oko za oko (Tit-for-Tat)

$$a_i^t = \begin{cases} \mathrm{S} & \text{pokud } t = 0, \\ \mathrm{S} & \text{pokud } t > 0 \wedge a_j^{t-1} = \mathrm{S} \text{ pro } j \neq i, \\ \mathrm{Z} & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Omezená odplata (Limited retaliation) – je dáno $k \in \mathbb{N}$

$$a_i^t = \begin{cases} \mathrm{Z} & \text{pokud } \exists j \neq i \ \ \exists t' \in \{t-k, \dots, t-1\} \mid a_j^{t'} = \mathrm{Z} \\ \mathrm{S} & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Win-Stay, Lose-Shift

$$a_i^t = \begin{cases} \mathrm{Z} & \text{pokud } a^{t-1} \in \{(S, Z), (Z, S)\}, \\ \mathrm{S} & \text{jinak.} \end{cases}$$

(Grim trigger, Grim trigger) je NE pokud $\delta \geq 0.5$

- Pokud oba hráči hrají grim trigger, žádný z hráčů nemá motivaci se od předpisu Grim triggeru odchylovat.
- Předpis Grim triggeru říká, že $a^t = (S,S)$ pro $t = 0, 1, \ldots$
- Dejme tomu, že se hráč i odchýlí v čase t'. Pak neodchylující se hráč j bude hrát $a_j^t = Z$ pro všechna $t = t' + 1, \ldots, \infty$
- Pak ale pro hráče i je optimální hrát také Z, je to totiž best response podle NE.
- Ukažme, že se nevyplatí se odchýlit:
    - před odchýlením výplaty stejné, řekněme, že k odchýlení dojde v čase 0
    - výplata po odchýlení: $F_i = (1-\delta)(2 + 0\delta^1 + 0\delta^2 + \cdots) = 2(1-\delta)$
    - výplata bez odchýlení: $F_i = (1-\delta)(\delta^0 + \delta^1 + \cdots) = (1-\delta)\frac{1}{1-\delta} = 1$
    - pokud $2(1-\delta) \geq 1$, vyplatí se Z. Tedy, pokud $\delta \geq \frac{1}{2}$, S je lepší a odchylovat se nevyplatí.

Dá se zobecnit ⇒ „Folk theorem“