# Teorie her

## Úvodní cvičení, různé hry

Miroslav Rada

12. 2. 2024

# Zmrzlinář

**Situace:**

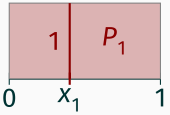
- zmrzlinář uvažuje, kam na pláži dlouhé 1 km umístit stánek; pláž má tvar úsečky
- poptávka po zmrzlině v jednotlivých bodech pláže je funkcí vzdálenosti od stánku
- cíl zmrzlináře: umístit stánek, aby úhrn poptávek přes všechny body byl maximální

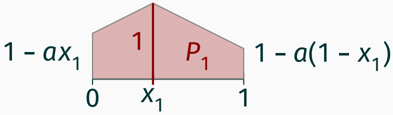
**Varianta K: konstantní poptávka**

- poptávka je nezávislá na vzdálenosti od stánku, např. o velikosti 1

**Varianta L: lineárně klesající poptávka**

- nechť $x_1$ je vzdálenost zmrzlináře od začátku pláže, pak poptávka v místě $x$ od začátku pláže je dána předpisem $p(x) = 1 - a(|x - x_1|)$, pro nějaké $a \leq 1$.



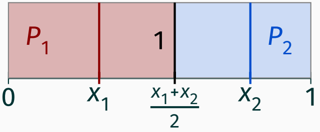
# Hra 1: zmrzlináři

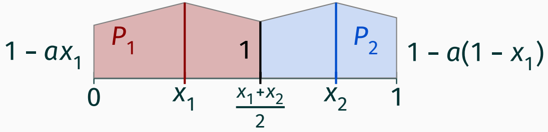
### Situace:

- uvažujme nyní *m* **zmrzlinářů**
- řekněme, že poptávka se realizuje u zmrzlináře, který má stánek blíže; jsou-li oba stejně daleko, rozdělí se na polovinu
- uvažujme oba předchozí případy, tj. jak konstantní poptávku, tak lineárně klesající poptávku

### Cíl:

- najít pozici **optimální** pozici zmrzlinářů



# Hra 1: různé varianty

**Varianta K s $m = 2$**

- oba zmrzlináři uprostřed pláže!

**Varianta K s $m > 2$**

- bonusový úkol

# Hra vs. rozhodovací problém

**Příklad**

4 osoby si objednávají v restauraci. Pokud:

- každý si platí sám $\Rightarrow$ rozhodovací problém
- každý platí čtvrtinu účtu $\Rightarrow$ hra

- **Hra**
  - více rozhodovatelů současně
  - individuální výsledek může být závislý na akcích ostatních
- **Teorie her**
  - disciplína studující chování rozhodovatelů v konfliktních situacích pomocí matematického modelování

# Hra 2: dvě třetiny průměru

**Situace:**

- každý hráč vybírá číslo z intervalu $[0, 100]$
- vyhrává každý hráč, který je nejblíže $\frac{2}{3}$ průměru všech vybraných čísel

**Preference (lexikograficky):**

- být nejblíže 2/3 průměru,
- minimalizovat počet výherců.

**Cíl:**

- jaké číslo je optimální vybrat?
- pojďme hru hrát na `https://hry.polyedr.cz/prumer`

# Hra 3: Piráti

**Situace:**

- $n$ racionálních pirátů najde poklad sestávající z $m$ mincí
- dělení probíhá následovně:
  - od nejstaršího po nejmladšího se vznáší návrhy na rozdělení,
  - o každém návrhu se ihned hlasuje, pokud je některý přijat, další návrhy se nevznáší,
  - nutná nadpoloviční většina hlasů,
  - pokud návrh není přijat, navrhující pirát je eliminován.

**Preference (lexikograficky):**

- maximalizace vlastního zisku,
- zachování vlastního života,
- maximalizace uzmutých cizích životů, a
- maximalizace spokojenosti starších pirátů (20,0,80,0,0 lepší než 20,0,0,0,80).

**Cíl:**

- optimální návrhy a chování při hlasování pro $n = 5$ a $m = 100$.
- řešení možno ověřit na `https://hry.polyedr.cz/pirati`

# Prvky hry a klasifikace her

## Hráči

- počet hráčů: 2 hráči / více hráčů
- možnosti kooperace: žádná / omezená / volná tvorba koalic
- přítomnost náhodného mechanismu
- informace: úplná / neúplná

## Strategie

- velikost prostoru strategií: konečný / nekonečný
- spojitost prostoru strategií: spojitý / nespojitý

## Výplatní funkce

- konstatní součet (antagonistická hra) / nekonstantní součet
- kooperace: přenosná / nepřenosná výhra

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \dots \times X_n$.

Trojice $(N, X, f)$ je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru**

$N = (1, 2)$,

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n$.

Trojice $(N, X, f)$ je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru**

$N = (1, 2)$, $X = ([0, 1], [0, 1])$, $f = (f_1, f_2)$,

# Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \dots \times X_n$.

Trojice $(N, X, f)$ je **hra v normálním tvaru**.

**Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru**

$N = (1, 2)$, $X = ([0, 1], [0, 1])$, $f = (f_1, f_2)$,

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)/2 & \text{pokud } x_1 < x_2, \\ 0.5 & \text{pokud } x_1 = x_2, \\ 1 - (x_1 + x_2)/2 & \text{jinak;} \end{cases} \qquad f_2 \text{ analogicky.}$$

# Hra v rozvinutém tvaru

- u hry v **normálním tvaru** se předpokládá, že rozhodnutí probíhají **simultánně**
- u hry v **rozvinutém tvaru** je rozhodování **sekvenční** (př. šachy, většina tahových her)
- obvyklou reprezentací je strom, kde každé větvení odpovídá jednomu rozhodnutí
- uzly – stavy, hrany – zvolené strategie

- pokud pozdější rozhodnutí nejsou ovlivňována dřívějšími, lze řešit zpětnou indukcí
- v některých případech lze převést na hru v normálním tvaru („rozbalit“ strom)
- uzly mohou být samy o sobě hrou se simultánním rozhodováním

# Hra ve tvaru charakteristické funkce

- pro kooperativní hry (s přenosnou výhrou)
- idea – zkoumat kooperaci formou hry normálním tvaru je výpočetně náročné, pojďme to usnadnit a říct, jaká bude výplata jednotlivých koalic

**Hra ve tvaru charakteristické funkce** je dvojice $(N, \varphi : 2^N \mapsto \mathbb{R})$.

- $N$ je množina hráčů, $\varphi$ funkce, které každé podmnožině $N$ přiřazuje výhru
- je možné klást otázky typu **Může koalice $K \subseteq N$ vzhledem k velikosti své výplaty vzniknout?** nebo **Jak se v rámci koalice $K$ má rozdělit zisk, pokud tato koalice vznikne?**

# Co považovat za řešení?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

**Nashovo equilibrium**

**Nashovo equilibrium** je taková kombinace strategií, tzv. **strategický profil**, $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, že pro každého hráče, řekněme $i$-tého, platí, že pro všechna $x_i \in X_i$ je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je takový strategický profil, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- strategický profil $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ budeme značit $(x_i, x_{-i}^*)$

# Best-response funkce

Podle definice Nashova ekvilibria je $x^*$ ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna $i$ platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{-i}).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat $x_i^*$ v závislosti na $x_{-i}$. Definujme tzv. **best-response funkci** $i$-tého hráče, značenou $g_i$. Zřejmě $g_i : X_{-i} \to 2^{X_i}$:

$$g_i(x_{-i}) \coloneqq \{x_i \in X_i \,:\, f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_i)\}.$$

Pak, $x^*$ je Nashovo ekvilibrium, pokud $x_i^* \in g_i(x_{-i})$ pro všechna $i \in N$.

# Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

**Situace:**

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

**Cíl:**

- navrhnout **optimální** chování hráčů

# Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

**Situace:**

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

**Cíl:**

- navrhnout **optimální** chování hráčů

**Výsledek:**

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**

# Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

**Situace:**

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

**Cíl:**

- navrhnout **optimální** chování hráčů

**Výsledek:**

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje

# Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

**Situace:**

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

**Cíl:**

- navrhnout **optimální** chování hráčů

**Výsledek:**

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje
- pokud chování je **pravděpodobnostní rozdělení nad symboly**, optimální chování existuje

# Hra 5: hra o nejvyšší číslo

**Situace:**

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

**Cíl:**

- má hra Nashovo ekvlibrium?

# Hra 5: hra o nejvyšší číslo

**Situace:**

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

**Cíl:**

- má hra Nashovo ekvlibrium?
- pokud ne, nepomohlo by změnit pojetí **chování**?

# Bonusové otázky k zamyšlení – I

- Již víme, že u hry 2/3 průměru (Hra 3) je optimální strategie $(0, \ldots, 0)$. Připouštěli jsme, že tipy hráčů mohou být reálná čísla z intervalu $[0, 100]$. Změní se něco, když se omezíme na celá čísla z intervalu $[0, 100]$?
  Poznamenejme, že optimální strategií rozumíme Nashovo ekvilibrium, tj. takovou kombinaci strategií, že žádný z hráčů nemá motivaci svou strategii změnit.
- Závisí nějak případná existence dalších ekvilibrií na počtu hráčů?

# Bonusové otázky k zamyšlení – II

Uvažujme znovu zmrzlináře (Hra 1). Víme, že je-li poptávka po zmrzlině konstantní (nezávislá na vzdálenosti k nejbližšímu stánku), je pro dva zmrzlináře ekvilibriem, stoupnou-li si doprostřed pláže.

- Jak to bude v případě konstantní poptávky pro 3 nebo více zmrzlinářů? Existuje nějaké Nashovo ekvilibrium?
- Řekněme, že je poptávka po zmrzlině závislá na vzdálenosti k nejbližšímu stánku. Konkrétně, stojí-li zmrzlináři na pozicích $x_1$ a $x_2$, je poptávka v bodě $x$ rovna $1 - a \min\{|x - x_1|, |x - x_2|\}$. Stejně jako u hry 1 se poptávka realizuje u toho zmrzlináře, který stojí blíže. Najděte optimální pozici zmrzlinářů pro $a = 1$, případně pro obecné $a \in (0, 1]$.
- Bude tentokrát ekvilibrium existovat pro více zmrzlinářů než 2? Proč?