4EK421 – nekonečné hry s konstantním součtem, symetrie

1 Zadání

Symetrická hra. Mějme hru s konstantním součtem $H = ((1,2),(X,X),(f_1,-f_1)$. Pokud pro každé $x, y \in X$ platí $f_1(x,y) = -f_1(y,x)$, nazveme hru H *symetrickou.*

Dokažme, že pokud má symetrická hra NE (x^*, y^*), pak $f_1(x^*, y^*) = 0$.

Hra o největší číslo. Mějme hru $H = ((1,2),(\mathbb{N},\mathbb{N}),(f_1,-f_1))$, kde $f_1 = \operatorname{sign}(x-y)$.

- Má H NE?
- Má H NE ve smíšeném rozšíření? Pokud ne, dokažme.

Modifikovaná hra o největší číslo. Modifikujme hru H výše tak, že $f_1(x,y) = \operatorname{ngis}(x,y)$, kde funkce ngis je modifikovaná funkce signum:

$$\operatorname{ngis}(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{pokud } x \geq 3y \\ 1 & \text{pokud } y < x < 3y \\ 0 & \text{pokud } y = x \\ -1 & \text{pokud } x < y < 3x \\ 1 & \text{pokud } y \geq 3x \end{cases}.$$

Najděme NE ve smíšených strategiích.

2 Symetrická hra

Definice 1. *Hra s konstantním součtem $H = ((1,2),(X,X),(f,-f))$ taková, že pro každé $x, y \in X$ platí $f(x,y) = -f(y,x)$, se nazývá* symetrická.

Věta 1. *Pokud má symetrická hra NE (x^*, y^*), pak $f(x^*, y^*) = 0$.*

Důkaz. Nechť (x^*, y^*) je NE symetrické hry $H = ((1,2),(X,X),(f,-f))$. Pak pro každé $y \in X$ platí definiční nerovnost NE ve tvaru $f(x^*, y^*) \leq f(x^*, y)$. Uvažujme speciálně $y^0 = x^*$. Zřejmě platí

$$-f(y^0, x^*) \overset{(*)}{=} f(x^*, y^0) \overset{(\dagger)}{=} f(y^0, x^*),$$

protože rovnost $(*)$ plyne ze symetričnosti hry a rovnost $(\dagger)$ z toho, že $x^* = y^0$. Protože $f(y^0, x*) = -f(y^0, x^*)$, platí zřejmě

$$f(y^0, x^*) = 0 = f(x^*, y^0) \overset{(\ddagger)}{\geq} f(x^*, y^*),$$

kde nerovnost $(\ddagger)$ plyne z toho, že (x^*, y^*) je NE.

Analogicky lze ukázat, že $f(x^*, y^*) \geq 0$, takže $0 \leq f(x^*, y^*) \leq 0$. $\square$

3 Hra o největší číslo

Mějme hru $H = ((1,2)),(\mathbb{N},\mathbb{N}),(f,-f))$, kde $f = \operatorname{sign}(x-y)$. Hledáme odpovědi na následující otázky:

- Má H NE?
- Má H NE ve smíšeném rozšíření?

Věta 2. *Hra H nemá NE.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $(x^*, y^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je NE hry H. Mohou nastat dva případy:

1. $x^* \geq y^*$, pak zřejmě $f_1(x^*, y^*) \in \{0, 1\}$; pro strategii $y^0 = x^* + 1$ hráče 2 je ovšem porušena definiční nerovnost NE $f_1(x^*, y^*) \leq f_1(x^*, y)$, která má platit pro všechna $y \in \mathbb{N}$, neboť $f_1(x^*, y^0) = -1$,

2. $x^* < y^*$, pak zřejmě $f_1(x^*, y^*) = -1$; pro strategii $x^0 = y^* + 1$ hráče 1 je ovšem porušena definiční nerovnost NE $f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*)$, která má platit pro všechna $x \in \mathbb{N}$, neboť $f_1(x^0, y^*) = 1$.

Ukázali jsme, že (x^*, y^*) nemůže být NE hry H, což je spor. $\square$

Smíšené rozšíření hry H. Smíšené rozšíření hry H je hra

$$H^s = ((1,2),(S,S),(f^s,-f^s)),$$

kde

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x \geq 0 \right\}, \qquad f^s(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \operatorname{sign}(i-j).$$

Věta 3. *Hra H^s nemá NE.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $(x^*, y^*) \in S \times S$ je NE hry H^s. Zaveďme $i = \min\{k \in \mathbb{N} : \sum_{l=1}^{k-1} y_l > 0.5\}$.[1] Zaveďme x^0 jako i-tou ryzí strategii hráče 1, tj. strategii

$$x^0 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1 \text{ krát}}, 1, 0, \dots).$$

Zabývejme se nyní hodnotou f^s pro dvojici strategií (x^0, y^*). Vzhledem ke tvaru x^0 je zřejmě

$$f^s(x^0, y^*) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^* \operatorname{sign}(i - j) = \sum_{j=1}^{i-1} y_j^* - \sum_{j=i+1}^{\infty} y_j^*,$$

a protože $\sum_{j=1}^{i-1} y_j^* > 0.5$, je $f^s(x^0, y^*) > 0$.

Protože je (x^*, y^*) NE, platí jistě $0 < f^s(x^0, y^*) \leq f^s(x^*, y^*)$. Nyní máme několik možností, jak pokračovat:

- vidíme-li, že H^s je symetrická hra, docházíme okamžitě ke sporu, protože $f^s(x^*, y^*) = 0 > 0$,
- nevidíme-li, že H^s je symetrická hra, můžeme použít větu 4 ze sekce 5, která se k symetričnosti H^s vyjadřuje, a pokračovat předchozím bodem,
- nebo se nemusíme symetričností H^s zabývat vůbec a můžeme analogicky zkonstruovat též odhad $f^s(x^*, y^*) < 0$, čímž dojdeme ke sporu. □

4 Modifikovaná hra o největší číslo

Modifikujme hru H výše tak, že $f_1(x, y) = \operatorname{ngis}(x, y)$, kde funkce ngis je modifikovaná funkce signum:

$$\operatorname{ngis}(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x \geq 3y \\ 1, & \text{pokud } y < x < 3y \\ 0, & \text{pokud } y = x \\ -1, & \text{pokud } x < y < 3x \\ 1, & \text{pokud } y \geq 3x \end{cases}.$$

Modifikace tedy spočívá v tom, že hráč prohrává, pokud je jeho číslo větší nebo rovno trojnásobku soupeřova čísla.

Zřejmě, takto modifikovaná hra H nemá NE (v ryzích strategiích), neboť pro každou dvojici strategií $(x^*, y^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lze najít x^0 nebo y^0 takové, že se výsledek hry změní. Argumentace je totožná jako v důkazu věty 2.

Doplňme pro formu část výplatní matice modifikované hry H:

[1] Index i je tedy první index takový, že součet prvních $(i-1)$ prvků smíšené strategie druhého hráče je větší než 0.5. Takový index jistě existuje; pokud by neexistoval, nemohla by posloupnost částečných součtů řady $\sum y_j$ konvergovat k 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
1	0	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
3	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	$\cdots$
4	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	$\cdots$
5	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\cdots$
6	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\cdots$
7	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	$\cdots$
8	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	$\cdots$
9	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	$\cdots$
10	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	$\cdots$
11	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	$\cdots$
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

NE ve smíšeném rozšíření modifikované hry H. Nalezněte všechna NE ve smíšeném rozšíření modifikované hry H. Řešení tohoto bonusového úkolu hodnoceného nejvýše 4 body odevzdejte e-mailem do 12.11. 23:59. Pokud budete při hledání NE hru převádět na konečnou hru, zdůvodněte, proč je převod možný, resp. vysvětlete, že z ekvilibrií oné konečné hry můžete dostat *všechna* ekvilibria modifikované hry H.

5 Příloha

Věta 4. *Hra H^s ze sekce 3 je symetrická.*

Důkaz. Zřejmě, prostory strategií hráčů jsou totožné. Zbývá ukázat, že $f^s(x,y) = -f^s(y,x)$ pro všechna $x, y \in S$, tj. že pro všechna $x, y \in S$ platí

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \operatorname{sign}(i-j) = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_i x_j \operatorname{sign}(i-j). \tag{1}$$

Označme L a P sumace na levé a pravé straně rovnice (1). Nechť $s_{k\ell}$ je sčítanec v L pro $i = k$ a $j = \ell$. Nechť $t_{k\ell}$ je sčítanec v P pro $i = \ell$ a $j = k$. Ukažme, že $s_{k\ell} = -t_{k\ell}$:

$$s_{k\ell} = x_k y_\ell \operatorname{sign}(k-\ell) = -x_k y_\ell \operatorname{sign}(\ell - k) = -t_{k\ell}.$$

Zřejmě tedy $L = -P$, což mělo být dokázáno. □