4EK421 – zadání úkolů – sada 1

Zpracovávání, odevzdání a hodnocení. Součástí odevzdaných úkolů musí být i komentář, zejména by mělo být patrné, jak bylo řešení dosaženo, proč byly provedeny kroky, které byly provedeny, apod.

Úkol se odevzdává do příslušné odevzdávárny v InSIS. Odevzdáte-li úkol v předstihu, úkol Vám okomentuji a vrátím k doplnění. Úkol tak půjde odevzdávat i po částech.

Rozumný počet bodů, které by měl za tuto sadu úloh získat student, který chce ze cvičení získat 50 bodů, je 6. Snadné body by mělo jít získat za úlohy 2, 5 a 6. Ostatní úlohy většinou vyžadují nějaký nápad.

Personalizace zadání. Žádá-li zadání úkolu, abyste si jej personalizovali podle data narození, lze použít vlastní datum narození nebo datum zvolit náhodně. V případě náhodné volby nicméně očekávám, že distribuce, ze které se bude náhodné datum generovat, bude *rozumná*, například že distribuce jednotlivých studentů budou po dvojicích nezávislé a že support distribuce bude pokrývat období několika let okolo Vašeho data narození a že v pravděpodobnostech jednotlivých dnů nebudou výrazné odchylky. Máte-li pochybnosti o tom, zda je Vaše distribuce rozumná, tak nejspíš není.

Zmrzlináři

Úloha 1: Zmrzlináři s konstantní poptávkou. [max. 5 bodů]

Vizte slidy z prvního cvičení, konkrétně první odrážku na slide 16.

Případ tří zmrzlinářů s konstantní poptávkou jsme řešili na cvičení – tam ekvilibrium neexistovalo. Existuje ekvilibrium, pokud zmrzlináři budou 4? Jak je to v případě 5 zmrzlinářů? A co když je zmrzlinářů 6, nebo obecněji, n? A je ekvilibrium unikátní, nebo jich existuje více?

Jakákoli odpověď musí být řádně zdůvodněna.

Úloha 2: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou jako hra v normálním tvaru. [2 body]

Podívejme se tentokrát na druhou odrážku ze slide 16 z prvního cvičení (odkaz výše).

Zformulujte případ s lineárně klesající poptávkou jako hru v normálním tvaru, tj. navrhněte prostory strategií X_1, X_2 a výplatní funkce $f_1(x_1, x_2)$ a $f_2(x_1, x_2)$ tak, aby trojice $((1, 2), (X_1, X_2), (f_1, f_2))$ popisovala zadanou situaci. Na a se dívejme jako na parametr z intervalu $(0, 1]$, tj. výplatní funkce formulujte obecně.

Úloha 3: Zmrzlináři s lineárně klesající poptávkou – nalezení NE. [max. 4 body]

Pro hru v normálním tvaru z úlohy 2 nalezněte Nashovo ekvilibrium, je-li $a = 1$.

Chcete-li všechny 4 body, ekvilibrium odvoďte parametricky pro libovolné $a \in (0,1]$.

2/3 průměru

Úloha 4: Hra 2/3 průměru s celočíselnými strategiemi. [3 body]
Vizte opět slidy z prvního cvičení, nyní slide 15.

Nalezněte všechna ekvilibria ve hře *2/3 průměru* modifikované tak, že čísla zvolená hráči z intervalu $[0, 100]$ mohou být pouze celá. Jistě, strategický profil $(0, \ldots, 0)$ je ekvilibriem i v tomto případě: zmenšili-li jsme prostory strategií odebráním neceločíselných možností, strategie 0 zůstane pro každého hráče nejlepší volbou (pokud všichni ostatní hrají též 0.

Nicméně po zmenšení prostorů strategií mohou nějaká ekvilibria přibýt. Přibudou? Závisí to nějak na počtu hráčů? Jak? Zdůvodněte.

Maticové hry

Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} R-50 & 2M-3 & 15 \\ 3M-6 & 22 & D+6 \\ -12 & D-8 & R/2 \end{pmatrix},$$

jejíž prvky závisí na parametrech R, M, D.

Úloha 5: Ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. [3 body]
Personalizujte si matici A podle data narození. Za R dosaďte rok narození zmenšený o 1900, za M pořadové číslo měsíce v roce, za D pořadové číslo dne v měsíci.

Nalezněte Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Uveďte, jaké výplaty mají hráči, chovají-li se podle daného ekvilibria.

Úloha 6: Vytvoření hry s více ekvilibrii. [2 body]
Nastavte R, D a M v matici A tak, aby hra s maticí A měla více ekvilibrií ve smíšeném rozšíření. Uveďte konkrétně alespoň dvě ekvilibria.

Úloha 7: Různá ekvilibria v ryzích strategiích [4 body]
Rozhodněte, zda v maticové hře mohou existovat dvě ekvilibria (k_1, ℓ_1) a (k_2, ℓ_2) taková, že $f_1(k_1, \ell_1) \neq f_1(k_2, \ell_2)$. Nemohou-li existovat, dokažte. Mohou-li existovat, uveďte příklad takové hry.

Úloha 8: Různá ekvilibria ve smíšeném rozšíření [3 body]
Rozhodněte otázku v úloze 7 pro smíšeném rozšíření.

Úloha 9: Nalezení všech NE ve smíšeném rozšíření [6 bodů]
Uvažujte hru s maticí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Popište explicitně množinu všech ekvilibrií ve smíšeném rozšíření maticové hry s maticí B. Nejste-li si jistí, zda je Váš popis dostatečně explicitní, ozvěte se. Nezbytnou součástí řešení musí být podrobný postup, jak byl popis získán.

Hra o nejvyšší číslo

Úloha 10: NE pro modifikovanou hru o nejvyšší číslo. [max. 4 body]
Vizte textík o hře o nejvyšší číslo a o symetrických hrách, konkrétně poslední odstavec sekce 1 a sekci 4.

Uvažujte modifikovanou hru o nejvyšší číslo. Rozhodněte, zda má hra Nashovo ekvilibrium ve smíšeném rozšíření. Pokud ne, zdůvodněte, pokud ano, nalezněte alespoň 1 ekvilibrium. Plný počet bodů lze získat za nalezení všech ekvilibrií a zdůvodnění, že jich není více.

Hra o dělitelné zakázky

Úloha 11: NE ve hře o dělitelné zakázky. [7 bodů]
Vizte slidy o hrách s konstatním součtem, konkrétně slide 19 (poslední).

Dokažte, že hra o dělitelné zakázky má ekvilibrium

$$\left(\begin{pmatrix} a\frac{s_1}{s} \\ a\frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ a\frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b\frac{s_1}{s} \\ b\frac{s_2}{s} \\ \vdots \\ b\frac{s_\ell}{s} \end{pmatrix} \right),$$

kde $s = \sum_{i=1}^{\ell} s_i$ je celková hodnota všech zakázek (tj. hráči své disponibilní prostředky mezi zakázky rozdělí v poměru velikostí zákázek).

K řešení úlohy se může hodit využít tzv. KKT podmínky. Pro každého z hráčů je nutné dokázat, že svůj zisk maximalizuje pro příslušnou zvolenou strategii.