4EK421 – Bayesovská hra, oligopoly, rozhodování při neurčitosti

Zpracovávání, odevzdání a hodnocení. Součástí odevzdaných úkolů musí být i komentář, zejména by mělo být patrné, jak bylo řešení dosaženo, proč byly provedeny kroky, které byly provedeny, apod.

Úkol se odevzdává do příslušné odevzdávárny v ISIS. Úkol je nutné odevzdat do 20. 5. 23:59. Doporučuji ale úkol odevzdat v předstihu nebo i postupně, aby byla případně možnost doplnění nebo opravy.

Body by mělo být snadné získat za úlohy 1, 2, 3 a 5.

Personalizace zadání. Žádá-li zadání úkolu, abyste si jej personalizovali podle data narození, lze použít vlastní datum narození nebo datum zvolit náhodně. V případě náhodné volby nicméně očekávám, že distribuce, ze které se bude náhodné datum generovat, budou *rozumné*, například že distribuce jednotlivých studentů budou po dvojicích nezávislé a že support distribuce bude pokrývat období několika let okolo Vašeho data narození. Máte-li pochybnosti o tom, zda je Vaše distribuce rozumná, tak nejspíš není.

Bayesovská hra

Personalizace. Následující zadání si personalizujte pomocí následujících hodnot

- $p_1 = R/202$, kde za R dosaďte rok narození zmenšený o 1900,
- $p_2 = 1 - R/202$, kde R je určeno stejně jako v předešlém bodě,
- $v_1 = 1 + D/40$, kde za D dosaďte den narození v měsíci.
- $v_2 = 1 + M/15$, kde za M dosaďte pořadové číslo měsíce v roce.

Použité datum narození může být vaše vlastní nebo Vámi náhodně zvolené, s jednou výjimkou: rok narození můžete v této úloze nastavit dle vlastní volby.

Situace Uvažujme hru dvou hráčů s neúplnou informací s následujícími parametry. Každý z hráčů volí jednu ze dvou strategií. Každý z hráčů může být jednoho ze dvou typů. Pravděpodobnost, že hráč 1 bude typu 1, je p_1. Pravděpodobnost, že hráč 2 bude typu 1, je p_2.

Výplaty každého z hráčů jsou *soukromé*, tj. nezávisí na typu protihráče. Výplatní matice hráče 1 v závislosti na jeho typu označme A^1, A^2. Výplatní matice hráče 2 v závislosti na jeho typu označme B^1, B^2. Strategie hráče 1 odpovídají řádkům, strategie hráče 2 sloupcům. Výplatní matice jsou následující:

$$A^1 = \begin{pmatrix} v_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & v_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_1/2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & v_2/2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 1: Bayesovská hra dvou hráčů. [8 bodů]
Zamyslete se nad tím, zda je zadání úplné. Bude-li se Vám zdát, že zadání úplné není, můžete-si úkol ulehčit doplněním zadání dle vlastní volby. Nalezněte Bayesovo-Nashovo ekvilibrium (v ryzích strategiích) nebo dokažte, že neexistuje.

Oligopol

Zadání si personalizujte pomocí data narození (nemusí být nutně Vaše vlastní; lze jej zvolit náhodně). Konkrétně, označme D pořadové číslo dne v měsíci a M pořadové číslo měsíce v roce.

Mějme hru $H = \{\{1,2,3\}, \{\mathbb{R},\mathbb{R},\mathbb{R}\}, \{f_1, f_2, f_3\}\}$, kde $f_i(x_1,x_2,x_3) = x_i c(x_1,x_2,x_3) - (n_i + v_i x_i)$ pro $i = 1,2,3$ a $c(x_1,x_2,x_3) = 6 - (0.45 + \frac{D}{300})(x_1 + x_2 + x_3)$. Parametry v, n pro jednotlivé hráče udává následující tabulka.

i	n_i	v_i	k_i
1	3	$0.5 + \frac{M}{20}$	6
2	2	0.9	$2.8 + \frac{D}{300}$
3	1	2.7	2

Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu, přičemž se pro jednoduchost předpokládá, že hráči mohou vyrábět jakékoli množství (potenciálně i záporné). Hráč i má fixní náklady n_i, variabilní náklady v_i; funkce f_i je jeho zisková funkce, skládající se z výnosů z prodeje a nákladů. Funkce c je cena, závisející na celkovém vyrobeném množství.

Úloha 2: Cournotův oligopol [5 bodů]
Předpokládejte, že hráči nespolupracují a svá výrobní množství volí současně. Nalezněte Nashovo ekvilibrium, tj. výrobní množství oligopolistů taková, aby žádné z oligopolistů neměl motivaci své výrobní množství změnit. Uveďte též hodnoty výplatních funkcí jednotlivých oligopolistů a cenu komodity, která se na trhu dle cenové funkce utvoří.

Úloha 3: Srovnání Stackelbergových duopolů [dohromady 8 bodů]
Předpokládejte, že se hry účastní pouze dva ze tří hráčů. Jsou tři možnosti, jak vybrat dvojici hráčů z dostupné trojice. Pro každou dvojici hráčů, řekněme hráče i a j, lze uvažovat dvě situace: hráč i je vůdce, hráč j je následník; nebo naopak, hráč j je vůdce a hráč i je následník. Stackelbergův oligopol funguje tak, že nejprve své množství zvolí vůdce, až poté následník; tj. následník již pracuje s informací, jaké množství vůdce vyrábí. Množství k_i pro jednotlivé hráče *ignorujte.*

Úkol. Úkol je následující. Uvažujte ekvilibrium pro každou ze 6 výše zmíněných konfigurací vůdce–následník. Ke každé konfiguraci uveďte cenu komodity, která se pro výrobní množství odpovídající ekvlibriu na trhu utvoří. Pro kterou z konfigurací je cena na trhu pro spotřebitele nejvýhodnější? Zdůvodněte, co činí dotčenou konfiguraci speciální, tj. proč je právě dotčená konfigurace nejvýhodnější.

Úlohu lze řešit buď hrubou silou, tj. vypočítat všech 6 ekvliibrií a pro každé spočítat cenu, nebo lze využít toho, že pozice hráčů je ve hře podobná v tom smyslu, že jejich ziskové funkce se liší jen variabilními a fixními náklady, a odvodit vlastnosti ekvilibrií a ceny v závislosti na nákladech.

Úloha 4: Cournotův oligopol s více než jedním NE [7 bodů]

Během semestru jsme vždy pracovali s takovým nastavením výplatních funkcí oligopolistů v Cournotově oligopolu, že v příslušné hře bylo vždy jedinečné ekvilibrium.

Uvažujte oligopol se dvěma oligopolisty. Předpokládejte, že prostory strategií oligopolistů jsou $[0, k_i]$ a že výplatní funkce jsou $f_i(x_1, x_2) = x_i c(x_1, x_2) - N_i(x_i)$. Navrhněte k_1, k_2 a funkce $c(x_1, x_2)$, $N_1(x_1)$ a $N_2(x_2)$ tak, aby ve hře existovalo více Nashových ekvilibrií. K volbě funkcí i kapacit oligopolistů vymyslete ekonomickou interpretaci, ve které navržené funkce budou dávat smysl. Ekonomická interpretace může být jakkoli okrajová nebo jakkoli nepravděpodobná, ale musí být konzistentní.

Ekvilibria ve Vámi navržené hře vypište a spočtěte hodnoty výplatních funkcí.

Rozhodování při neurčitosti

Zadání v této sekci si personalizujte dosazením hodnot R, M, D. Ty jsou určeny na základě data narození:

- za R dosazujte poslední dvojčíslí roku narození,
- za M dosazujte pořadové číslo měsíce narození v roce, a
- za D dosazujte pořadové číslo dne narození v měsíci.

Použijte buď vlastní datum narození, nebo náhodně vybrané.

Situace. Je dána rozhodovací situace za neurčitosti. Rozhodovatel má na výběr z m variant $v_1, \ldots, v_m$. Poté, co některou z variant vybere, nastane některý z n stavů světa $s_1, \ldots, s_n$. V případě, že rozhodovatel vybere variantu v_i a nastane stav světa s_j, bude rozhodovatel čerpat známý zisk a_{ij}. Rozhodovatel nemá žádné informace o rozdělení pravděpodobností nad jednotlivými stavy světa.

Konkretizace zadání. Uvažujme nyní výše nastíněnou situaci pro $m = n = 5$. Hodnoty a_{ij} jsou pro všechny myslitelné kombinace varianty a stavu světa uspořádány v matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 13 & 34 \\ 21 & 8 + \lfloor M/2 \rfloor & 3 & 1 & 0 \\ 10 + D & 10 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & \lfloor R/4 \rfloor & 16 & 2 \end{pmatrix},$$

kde $\lfloor a \rfloor$ je dolní celá část čísla a (tj. číslo a zaokrouhlené na nebližší nižší celé číslo).

Úloha 5: Standardní principy [3 body]

Vyberte nejvhodnější variantu pomocí každé z náledujících standardních metod:

1. Laplaceův princip,
2. Waldův princip maximinu,
3. Hurwitzův princip vyváženého optimismu – použijte ukazatel optimismu $\alpha = (M \cdot D + R)/(12 \cdot 31 + 99)$ a
4. Savageův princip minimaxu ztráty.

Ke každému principu uveďte pro každou variantu hodnoty kritérií, podle kterých jste nejvhodnější variantu vybírali.

Úloha 6: Princip maximálního polyedru [5 nebo 10 bodů]

Podle *principu maximálního polyedru* je v rozhodovací situaci za neurčitosti nejvhodnější ta varianta, která má největší očekávanou hodnotu výhry pro nejvíce potencionálních přiřazení pravděpodobností $p_1, \ldots, p_n$ jednotlivým stavům světa.

Jedno z možných odůvodnění tohoto principu je následující: poté, co rozhodovatel vybere některou z variant (ale předtím, než některý ze stavů světa skutečně nastane), dozví se pravděpodobnostní rozdělení nad stavy světa. Ve chvíli, kdy se tak stane, je jeho rozhodnutí posuzováno vyšší mocí na základě očekávané hodnoty výhry (například, je-li rozhodovatelem bezradný zaměstnanec, může onou vyšší mocí být „vždy vševědoucí“ šéf). Jsou-li všechna rozdělení pravděpodobností nad stavy světa stejně pravděpodobná, maximalizuje princip největšího polyedru pravděpodobnost, že se bude při výše popsaném posuzování podle střední hodnoty výhry jevit vybraná varianta jako nejvhodnější.

Vzhledem k tomu, že množina všech potenciálních pravděpodobnostních rozdělení $p_1, \ldots, p_n$ nad stavy světa, tj. $\{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n p_i = 1, p \geq 0\}$ je $(n-1)$-dimenzionální polyedr (vlastně, jde o speciální polyedr s pěknými vlastnostmi, tzv. *simplex*), je patrně nejvhodnějším kritériem pro porovnávání variant $(n-1)$-dimenzionální objem množiny všech pravděpodobnostních rozdělení, pro které je nejlepší ta která varianta.

Pro variantu ℓ je kriteriální hodnota

$$k_\ell = vol(\{p \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1, p \geq 0, \sum_{j=1}^n p_j a_{\ell j} \geq \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}, i = 1, \ldots, m\})$$

Můžete buď:

1. úlohu řešit jen pro stavy světa s_1, s_2, s_3, tj. uvažovat jen první tři sloupce matice A. Pak lze řešit na papíře, ale lze získat jen 5 bodů.
2. úlohu řešit pro všech 5 stavů světa. Budete potřebovat nástroj pro výpočet 4dimenzionálního objemu. Z běžně dostupných matematických prostředí (MatLab, R, aj.) se dá volat knihovna quickhull. Zde můžete získat 10 bodů.