4EK421 – cvičení č. 6 – nekonečné hry – symetrie, oligopol – řešení

1 Oligopol

Zadání. Mějme hru $H = \{\{1,2,3\}, \{[0,k_1],[0,k_2],[0,k_3]\}, \{f_1,f_2,f_3\}\}$, kde

$$f_i(x_1,x_2,x_3) = x_i c(x_1,x_2,x_3) - (n_i + v_i x_i)$$

pro $i = 1,2,3$ a $c(x_1,x_2,x_3) = 6 - 0.5(x_1+x_2+x_3)$. Parametry k, v, n pro jednotlivé hráče udává následující tabulka.

i	n_i	v_i	k_i
1	3	0.5	6
2	2	0.75	3
3	1	2.5	2

Předpokládejme, že hráči nespolupracují. Nalezněme NE.

Interpretace zadání. Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu. Hráč i má kapacitu výroby k_i, fixní náklady n_i, variabilní náklady v_i; funkce f_i je jeho zisková funkce, skládající se z příjmů z prodeje a nákladů. Funkce c je cena, závisející na celkovém vyrobeném množství.

Idea hledání NE. NE je taková trojice přípustných výrobních množství (x_1^*, x_2^*, x_3^*), že pro každé $i = 1,2,3$ a každé $x_i \in [0,k_i]$ platí

$$f_i(x_1*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_3^*) \leq f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*).$$

Pro pevné i nerovnost říká, že i-tý hráč nemůže dosáhnout lepší výplaty, pokud se odchýlí od množství x_i^*. Jednotlivé hodnoty $f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ tedy musí být maximální v následujícím smyslu:

$$\max_{x_1 \in [0,k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$
$$\max_{x_2 \in [0,k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*) = f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$
$$\max_{x_3 \in [0,k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3) = f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

Každá z rovností, řekněme i-tá, tedy předepisuje hodnotu maxima funkce jedné proměnné x_i na prostoru strategí i-tého hráče. Vyhovující (x_1^*, x_2^*, x_3^*) lze tedy získat řešením následující soustavy rovností

$$\begin{aligned} x_1^* &= \arg\max_{x_1 \in [0,k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*), \\ x_2^* &= \arg\max_{x_2 \in [0,k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*), \\ x_3^* &= \arg\max_{x_3 \in [0,k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3). \end{aligned} \tag{1}$$

Vlastnosti funkcí f_i ve vztahu k řešení soustavy (1). Soustavu ve tvaru (1) by při zcela obecných funkcích f_1, f_2, f_3 mohlo být těžké vyřešit. V našem případě však lze využít toho, že funkce f_i je v proměnné x_i (při fixních x_j pro $j \neq i$) kvadratická a konkávní. Konkávnost lze snadno ověřit výpočtem druhé derivace podle x_i (ověření jednotlivých kroků výpočtu ponecháváme na laskavém čtenáři):

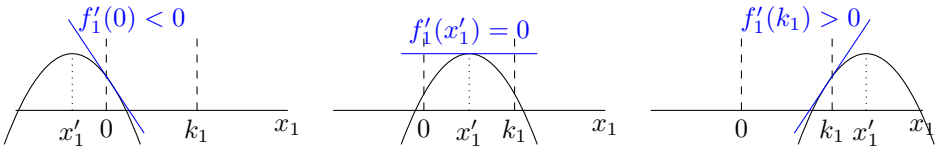
$$\begin{aligned} f_i &= -0.5x_i^2 + (6 - v_i - 0.5\sum_{j \neq i} x_j)x_i - n_i, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} &= -x_i + 6 - v_i - 0.5\sum_{j \neq i} x_j, \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} &= -1. \end{aligned}$$

Konkávní kvadratická funkce f jedné proměnné x má v $\mathbb{R}$ právě jedno maximum, a to pro takové x_0, pro které je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$. Tento poznatek však nelze pro řešení soustavy (1) použít přímo, protože se zde maxima hledají pouze na intervalech určených povolenými výrobními množstvími jednotlivých hráčů, nikoli v celém $\mathbb{R}$.

Uvažujme nyní f_1. Pro pevně zvolené $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ mohou ve vztahu k poloze $x_1' = \arg\max_{x_1 \in \mathbb{R}} f_1(x_1, x_2, x_3)$ vůči intervalu $[0, k_1]$ nastat tři případy:

1. $x_1' < 0$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0$,
2. $x_1' \in [0, k_i]$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1') = 0$, nebo
3. $x_1' > k_1$, pak zřejmě $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0$.

Ilustrace jednotlivých případů následuje.



Pokud tedy $x_1' < 0$, pro hráče 1 je (při zafixovaných strategiích x_2, x_3) optimální strategií $x_1 = 0$, pokud $x_1' > 0$, je pro hráče 1 optimální $x_1 = k_1$.

Řešení soustavy (1)**.** Z diskuze výše je zřejmé, že každou rovnici soustavy (1), řekněme první rovnici, lze přepsat takto:

$$x_1^* = \arg\max_{x_1 \in [0,k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0, \\ k_1, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0, \\ x_1', & \text{jinak.} \end{cases} \tag{2}$$

Zápis (2) otevírá prostor ke zformulování soustavy (1) jako soustavy nelineárních (ne)rovností, která bude řešitelná pomocí běžných solverů. Nejprve soustavu zformulujme a pak vysvětleme, proč je její řešení řešením soustavy (1).

$$\forall i = 1,2,3 : \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \le x_i \le k_i, \\ 0 = x_i z_i, & 0 \le y_i, \\ 0 = (k_i - x_i) y_i, & 0 \le z_i \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Mohlo by se zdát, že sady (ne)rovností pro jednotlivá i jsou na sobě nezávislé. Tomu tak pochopitelně není: v derivacích f_i podle x_i se vyskytují všechny proměnné x_1, x_2, x_3.

Nejdůležitějšími rovnostmi soustavy (3) jsou zřejmě rovnosti $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i$, které v kombinaci s ostatními rovnostmi kladou jistý požadavek na derivace jednotlivých funkcí f_i. Jak ale tento požadavek přesně vypadá? Ve skutečnosti vcelku přesně odpovídá rovnici (2). V soustavě jsou pro každé i zavedeny nezáporné proměnné y_i a z_i. Omezení $x_i z_i = 0$ resp. $(k_i - x_i)y_i = 0$ zaručují, že z_i resp. y_i bude moci být nenulové jen tehdy, pokud $x_i = 0$ resp. $x_i = k_i$. Tedy, pokud $x_i = 0$ resp. $x_i = k_i$, pak nenulové z_i resp. y_i v souladu s (2) povoluje, aby $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$ resp. > 0. Ve všech ostatních případech, tedy pokud $0 < x_i < k_i$, rovnice vynucují, aby $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$.

Zopakujme nyní ještě pro jistotu, proč je řešení (x_1^*, x_2^*, x_3^*) soustavy (3) zároveň také řešením soustavy (1) a tím i Nashovým ekvilibriem. Podívejme se na libovolné x_i^*. Pokud

- $x_i^* = 0$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \le 0$; ke zlepšení hodnoty f_i by proto mohlo dojít pouze při snižování x_i^*, to ale lze pouze zvyšovat, což se nevyplatí,
- $x_i^* = k_i$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \ge 0$; ke zlepšení hodnoty f_i by proto mohlo dojít pouze při zvyšování x_i^*, to ale lze pouze snižovat, což se nevyplatí,
- $0 < x_i^* < k_i$, pak $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) = 0$ a x_i^* se proto nevyplatí měnit.

Optimalizační verze. Soustava (3) obsahuje nelineární omezení, což může její řešení solverům zkomplikovat (byť je alespoň teoreticky možné). Může proto být výhodné přesunout tato omezení do účelové funkce.

Nelineární omezení jsou dvou typů: $x_i z_i = 0$ a $(k_i - x_i)y_i = 0$. Všimněme si, že na všechny činitele, které se v nelineárních omezeních vyskytují, jsou jinými omezeními

kladeny požadavky na nezápornost. Nezáporné jsou tedy jistě všechny jejich součiny. To otevírá možnost místo soustavy (3) řešit optimalizační úlohu

$$\text{minimalizovat } \sum_{i=1}^{3} x_i z_i + (k_i - x_i) y_i$$

$$\text{vzhledem k } \forall i = 1,2,3 : \left(\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \le z_i \\ 0 \le x_i \le k_i, & 0 \le y_i, \end{array} \right).$$

Zřejmě, optimální hodnota úlohy je 0, které účelová funkce nabývá právě pro ta přípustná řešení, která jsou řešeními soustavy (3).

Řešení úlohy solverem. Zbylou část práce, tj. použít nějaké vhodný solver na konkrétní data, si ponechejme jako cvičení.

2 Symetrická hra

Definice 1. *Hra s konstantním součtem* $H = \{\{1,2\}, \{X,X\}, \{f,-f\}\}$ *taková, že pro každé* $x, y \in X$ *platí* $f(x,y) = -f(y,x)$*, se nazývá* symetrická.

Věta 1. *Pokud má symetrická hra NE* (x^*, y^*)*, pak* $f(x^*, y^*) = 0$.

Důkaz. Nechť (x^*, y^*) je NE symetrické hry $H = \{\{1,2\}, \{X,X\}, \{f,-f\}\}$. Pak pro každé $y \in X$ platí definiční nerovnost NE ve tvaru $f(x^*, y^*) \le f(x^*, y)$. Uvažujme speciálně $y^0 = x^*$. Zřejmě platí

$$-f(y^0, x^*) \overset{(*)}{=} f(x^*, y^0) \overset{(\dagger)}{=} f(y^0, x^*),$$

protože rovnost $(*)$ plyne ze symetričnosti hry a rovnost $(\dagger)$ z toho, že $x^* = y^0$. Protože $f(y^0, x*) = -f(y^0, x^*)$, platí zřejmě

$$f(y^0, x^*) = 0 = f(x^*, y^0) \overset{(\ddagger)}{\ge} f(x^*, y^*),$$

kde nerovnost $(\ddagger)$ plyne z toho, že (x^*, y^*) je NE.

Analogicky lze ukázat, že $f(x^*, y^*) \ge 0$, takže $0 \le f(x^*, y^*) \le 0$. □

3 Hra o největší číslo

Mějme hru $H = \{\{1,2\}, \{\mathbb{N},\mathbb{N}\}, \{f,-f\}\}$, kde $f = \text{sign}(x - y)$. Hledáme odpovědi na následující otázky:

- Má H NE?
- Má H NE ve smíšeném rozšíření?

Věta 2. *Hra H nemá NE.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $(x^*, y^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je NE hry H. Mohou nastat dva případy:

1. $x^* \geq y^*$, pak zřejmě $f_1(x^*, y^*) \in \{0, 1\}$; pro strategii $y^0 = x^* + 1$ hráče 2 je ovšem porušena definiční nerovnost NE $f_1(x^*, y^*) \leq f_1(x^*, y)$, která má platit pro všechna $y \in \mathbb{N}$, neboť $f_1(x^*, y^0) = -1$,
2. $x^* < y^*$, pak zřejmě $f_1(x^*, y^*) = -1$; pro strategii $x^0 = y^* + 1$ hráče 1 je ovšem porušena definiční nerovnost NE $f_1(x, y^*) \leq f_1(x^*, y^*)$, která má platit pro všechna $x \in \mathbb{N}$, neboť $f_1(x^0, y^*) = 1$.

Ukázali jsme, že (x^*, y^*) nemůže být NE hry H, což je spor. □

Smíšené rozšíření hry H. Smíšené rozšíření hry H je hra

$$H^s = \{\{1, 2\}, \{S, S\}, \{f^s, -f^s\}\},$$

kde

$$S = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} x_i = 1, x \geq 0 \right\}, \qquad f^s(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \operatorname{sign}(i - j).$$

Věta 3. *Hra H^s nemá NE.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $(x^*, y^*) \in S \times S$ je NE hry H^s. Zaveďme $i = \min\{k \in \mathbb{N} : \sum_{l=1}^{k-1} y_l > 0.5\}$.[1] Zaveďme x^0 jako i-tou ryzí strategii hráče 1, tj. strategii

$$x^0 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{i-1 \text{ krát}}, 1, 0, \dots).$$

Zabývejme se nyní hodnotou f^s pro dvojici strategií (x^0, y^*). Vzhledem ke tvaru x^0 je zřejmě

$$f^s(x^0, y^*) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j^* \operatorname{sign}(i - j) = \sum_{j=1}^{i-1} y_j^* - \sum_{j=i+1}^{\infty} y_j^*,$$

a protože $\sum_{j=1}^{i-1} y_j^* > 0.5$, je $f^s(x^0, y^*) > 0$.

Protože je (x^*, y^*) NE, platí jistě $0 < f^s(x^0, y^*) \leq f^s(x^*, y^*)$. Nyní máme několik možností, jak pokračovat:

- vidíme-li, že H^s je symetrická hra, docházíme okamžitě ke sporu, protože $f^s(x^*, y^*) = 0 > 0$,

[1] Index i je tedy první index takový, že součet prvních $(i - 1)$ prvků smíšené strategie druhého hráče je větší než 0.5. Takový index jistě existuje; pokud by neexistoval, nemohla by posloupnost částečných součtů řady $\sum y_j$ konvergovat k 1.

- nevidíme-li, že H^s je symetrická hra, můžeme použít větu 4 ze sekce 5, která se k symetričnosti H^s vyjadřuje, a pokračovat předchozím bodem,
- nebo se nemusíme symetričností H^s zabývat vůbec a můžeme analogicky zkonstruovat též odhad $f^s(x^*, y^*) < 0$, čímž dojdeme ke sporu. □

4 Modifikovaná hra o největší číslo

Modifikujme hru H výše tak, že $f_1(x, y) = \text{ngis}(x, y)$, kde funkce ngis je modifikovaná funkce signum:

$$\text{ngis}(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x \geq 3y \\ 1, & \text{pokud } y < x < 3y \\ 0, & \text{pokud } y = x \\ -1, & \text{pokud } x < y < 3x \\ 1, & \text{pokud } y \geq 3x \end{cases} .$$

Modifikace tedy spočívá v tom, že hráč prohrává, pokud je jeho číslo větší nebo rovno trojnásobku soupeřova čísla.

Zřejmě, takto modifikovaná hra H nemá NE (v ryzích strategiích), neboť pro každou dvojici strategií $(x^*, y^*) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lze najít x^0 nebo y^0 takové, že se výsledek hry změní. Argumentace je totožná jako v důkazu věty 2.

Doplňme pro formu část výplatní matice modifikované hry H:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
1	0	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
2	1	0	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	⋯
3	-1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	⋯
4	-1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	⋯
5	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	⋯
6	-1	-1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	⋯
7	-1	-1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	⋯
8	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	-1	⋯
9	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	-1	⋯
10	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	0	-1	-1	⋯
11	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	-1	⋯
12	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	0	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

NE ve smíšeném rozšíření modifikované hry H. Nalezněte NE ve smíšeném rozšíření modifikované hry H. Řešení tohoto bonusového úkolu hodnoceného nejvýše 4 body odevzdejte e-mailem do 3.11. 8:59. Pokud budete při hledání NE hru převádět na konečnou hru, zdůvodněte, proč je převod možný.

5 Příloha

Věta 4. *Hra H^s ze sekce 3 je symetrická.*

Důkaz. Zřejmě, prostory strategií hráčů jsou totožné. Zbývá ukázat, že $f^s(x,y) = -f^s(y,x)$ pro všechna $x, y \in S$, tj. že pro všechna $x, y \in S$ platí

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j \operatorname{sign}(i-j) = -\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} y_i x_j \operatorname{sign}(i-j). \tag{4}$$

Označme L a P sumace na levé a pravé straně rovnice (4). Nechť $s_{k\ell}$ je sčítanec v L pro $i = k$ a $j = \ell$. Nechť $t_{k\ell}$ je sčítanec v P pro $i = \ell$ a $j = k$. Ukažme, že $s_{k\ell} = -t_{k\ell}$:

$$s_{k\ell} = x_k y_\ell \operatorname{sign}(k-\ell) = -x_k y_\ell \operatorname{sign}(\ell - k) = -t_{k\ell}.$$

Zřejmě tedy $L = -P$, což mělo být dokázáno.

□