4EK421 – cvičení č. 12 – různé příklady

1 Otrávená čokoláda

Mějme čtvercovou tabulku čokolády o rozměru $m \times n$, $\max\{m, n\} > 1$. Dílek na pozici $(1, 1)$ je otrávený. Dva hráči střídavě čokoládu podle jistého pravidla ujídají. Ten, kdo sní otrávený dílek, prohraje.

Pravidlo pro ujídání je následující. Hráč, který je právě na tahu, vybere dosud nesnědený dílek na pozici (i, j), a sní všechny dílky nacházející se ve čtverci tvořeném (potenciálně již snědenými) dílky $(i, j), (i, n), (n, j), (n, n)$.

Hru je možné hrát na `http://hry.polyedr.cz/chocolate`.

Úkoly.

- Uvažujme hru s $m = n > 1$. Popišme vyhrávající strategii pro hráče, který začíná.
- Dokažme, že (v obecném případě) existuje vyhrávající strategie pro hráče, který začíná.
- Ukažme, že počet stavů, do kterých se hra může dostat, je exponenciálně velký v $\Omega(\min\{m, n\})$ (tj. že vyhrávající strategii není únosné hledat hrubou silou; $\Omega(x)$ znamená funkci větší než nějaká lineární funkce x).

2 Kostky – párový hlasovací paradox

Mějme tři šestistěnné kostky. Předpokládejme, že na stěnách těchto kostek jsou navzájem různá čísla. Zaveďme mezi kostkami relaci „JeLepší(k, l)“, která platí pro takovou dvojici kostek (k, l), že hodíme-li jednou oběma kostkami, je pravděpodobnost, že na kostce k padne větší číslo než na kostce l, (ostře) větší než $p = 0.5$.

Označme nyní naše tři kostky písmeny k, l, m. Na 18 stěn těchto 3 kostek umístěme čísla z množiny $\{1, \dots, 18\}$ (každé číslo je umístěné právě na jedné stěně některé z kostek) tak, aby relace JeLepší nebyla tranzitivní (tj. např. aby zároveň platilo JeLepší(k, l), JeLepší(l, m) a JeLepší(m, k)).

Jaké můžeme zvolit největší p v definici relace JeLepší, aby netranzitivita mohla zůstat zachována?

Povšimněme si vztahu s párovým hlasovacím paradoxem: lze vybrat pořadí kostek takové, abychom při provedení dvou párových srovnání mohli označit za nejlepší kteroukoli kostku.

3 Ostrov prokletého řádu

Na jistém ostrově žijí jistí mniši jistého řádu. Řád s sebou nese břemeno v podobě strašlivé kletby: někteří mniši mohou mít červené oči. Řád se s kletbou vyrovnal zavedením následujících pravidel:

1. každý mnich obývá vlastní celu, ve které tráví dobu od desáté hodiny večerní do páté hodiny ranní,
2. zjistí-li některý mnich, že má červené oči, je o následující půlnoci spáchat ve své cele sebevraždu,
3. mniši mají zakázáno se navzájem informovat o barvě očí,
4. na ostrově nejsou žádné odrazivé plochy (tj. mnich nemá prostředek, jak bez informace z vnějšku zjistit vlastní barvu očí), a
5. mniši se každý den potkávají (tj. každý mnich zná barvu očí ostaních mnichů).

Vzhledem k pravidlům 3 a 4 žijí na ostrově všichni mniši ve všeobecné spokojenosti.

Jednoho dne však navštíví ostrov turista, který neví nic o kletbě ani o pravidlech řádu (nebo to ví a je prostš zlý). Když odjíždí, řekne všem mnichům: „Někteří z vás mají červené oči.“

Předpokládejme, že všichni mniši turistovi věří a že vědí, že mu všichni věří. Co se po turistově odjezdu stane a kdy?