4EK421 – cvičení č. 4 – bimaticové hry, metoda fiktivní hry

Smíšené strategie v bimaticové hře. Uvažujme následující hru:

Dvě firmy bojují o zakázky v hodnotách $40+R$, $20+M$ a $20+D$ (R, M, D jsou po řadě rok, měsíc a den narození školních mluvících hodinek s vodotryskem).

O zakázky se bojuje lobováním: každá firma přiřadí každé zakázce objem peněžních jednotek, kterými za získání dané zakázky lobuje. Firma 1 má na lobování dvě peněžní jednotky, firma 2 pouze jednu jednotku. Lobovat je možné pouze v celých penežních jednotkách. Firmy do lobování alokuji veškeré prostředky, které mají k dispozici.

Firma zakázku získá tehdy, kdy pro ni lobuje alespoň jednou peněžní jednotkou a zároveň pro ni lobuje více jednotkami než konkurence. Pokud pro některou zakázku lobují obě firmy stejným (nenulovým) počtem peněžních jednotek, získá každá firma polovinu objemu dané zakázky.

Cílem obou firem je maximalizovat objem zakázek.

Sestavte na základě výše uvedeného popisu dvojmatici popisující daný konflikt.

1. Nalezněte alespoň jedno Nashovo ekvilibrium v jejím smíšeném rozšíření. Můžete použít jednu z formulací níže.
2. Jaké budou rovnovážné strategie jednotlivých hráčů? Jaké budou jejich výplatní funkce?
3. Pokuste se nalézt Nashových ekvilibrií více.

Kooperace s přenosnou výhrou. Uvažujte bimaticovou hru výše. Předpokládejte, že se jedná o kooperativní hru s přenosnou výhrou.

1. Spočtěte hodnoty charakteristické funkce pro jednotlivé hráče i pro jejich koalici. Charakteristickou funkci spočítejte ve dvou variantách (viz slidy).
2. Pro obě zvolené varianty charakteristické funkce určete, jak vypadá jádro hry a zda je pro hráče výhodné kooperovat.
3. Pokud je pro hráče kooperace výhodná, navrhněte nějaké vhodné dělení celkové výhry, které považujete za spravedlivé.

Nelineární program pro nalezení NE. Pro nalezení NE ve smíšeném rozšíření bimaticové hry lze použít následující program:

$$\begin{aligned}
\max_{p\in\mathbb{R}^{m_1}, q\in\mathbb{R}^{m_2}} F(p,q) = \sum_{i\in X_1, j\in X_2} p_i(a_{ij}+b_{ij})q_j - \sum_{i\in X_1} p_i - \sum_{j\in X_2} q_j \\
\sum_{j\in X_2} a_{ij}q_j \le 1, \qquad \forall i \in X_1 \\
\sum_{i\in X_1} b_{ij}p_i \le 1, \qquad \forall j \in X_2 \\
p_i, q_j \ge 0, \qquad i \in X_1, j \in X_2
\end{aligned}$$

V maticové podobě:

$$\begin{aligned}
\max_{p\in\mathbb{R}^{m_1}, q\in\mathbb{R}^{m_2}} F(p,q) &= p^\mathsf{T}(A+B)q - 1^\mathsf{T}p - 1^\mathsf{T}q \\
Aq &\le 1 \\
B^\mathsf{T}p &\le 1 \\
p, q &\ge 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Věta 1. *Nechť je (p,q) optimální řešení úlohy (1) takové, že $p \ne 0$ a $q \ne 0$. Nechť $x^* = p/1^\mathsf{T}p$ a $y^* = q/1^\mathsf{T}q$.*

Pak $F(p,q) = 0$ a (x^*, y^*) jsou NE bimaticové hry zadané výplatními maticemi A a B.

Metoda fiktivní hry. Metodou fiktivní hry získejte odhad NE v maticové hře zadané maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$