4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hlasovací hry, hry v rozvinutém tvaru

Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze

11. prosince 2015

Hra v rozvinutém tvaru – příběh

- Mějme hru s řadou po sobě jdoucích rozhodnutí.
- Hra se v každém okamžiku nachází v nějakém *stavu*. Stav je určen počátečním modelem hry a předcházejícími rozhodnutími. Poté, co je přijato nějaké rozhodnutí, se stav hry může změnit. Stavy jsou *rozhodovací* nebo *pravděpodobnostní*
- V každém rozhodovacím stavu se rozhoduje právě jeden hráč, který vybírá některou ze spočetně mnoha strategií.
- Příklad: šachy, jiné hry apod.
- Přechody v pravděpodobnostních stavech jsou předem určené.

Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *BoS* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Modifikace:
Řekněme, že jeden z manželů odchází z práce dřív a koupí lístky dle vlastního výběru. Druhý se buď přidá, nebo si koupí vlastní lístek na druhý konzert.

- Jak se mají hráči chovat, pokud se bude rozhodovat dříve řádkový hráč?
- A co v případě sloupcového hráče?

Piškvorky 3×3

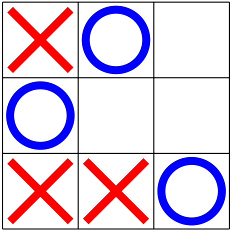
- Mějme piškvorky v mřížce 3×3. Velikost políčka je 1cm $\times$ 1cm.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka (velikost značky libovolná).
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Piškvorky 3×3

- Mějme piškvorky v mřížce 3×3. Velikost políčka je 1cm $\times$ 1cm.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka.
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Otázky:

- Odvoďme nějakou horní mez počtu stavů, do kterých se hra může dostat?
- Sestavme graf podhry, nacházející se ve stavu níže (modrý na tahu).



Model hry v rozvinutém tvaru

Za model hry H v rozvinutém tvaru vezměme množinu $H = \{N, G = \{S, R\}, f, v, p\}$, kde

- $N = \{1, \ldots, n, 0\}$ je množina hráčů, 0 je fiktivní hráč (hraje smíšené strategie v pravděpoobnostních stavech),
- G je orientovaný graf popisující možná rozhodnutí v dané hře, určený
  - množinou S jednotlivých stavů, ve kterých se hra může nacházet,
  - množinou $R \subseteq S \times S$ možných rozhodnutí; pokud $(s_1, s_2) \in R$, znamená to, že zahráním některé strategie se lze přesunout do stavu s_2.
- $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$ je zobrazení přiřazující jednotlivým stavům výplaty jednotlivých hráčů; ty jsou vypláceny okamžitě ve chvíli, kdy hra do daného stavu vstoupí,
- $v : S \mapsto N$ je zobrazení přiřazující jednotlivý stavům hráče, který se v daném stavu rozhoduje,
- p je zobrazení přiřazující každému pravděpodobnostnímu stavu s (tj. $s \in \{s \in S : v(s) = 0\}$) rozdělení pravděpodobností nad jednotlivými hranami vycházejícími z s (tj. hranami $\{(s, t) \in R : t \in S\}$).

Model hry v rozvinutém tvaru – poznámky a způsob řešení

- Typicky jsou nenulové f jen ve stavech, ze kterých už nevedou žádné hrany (dá se transformovat, viz také níže), říkejme jim *listy*.
- Graf G je typicky strom (tj. souvislý acyklický).
- Graf G může být složitý, ale dá se zestromovatět (na nekonečnou výšku nebo šířku).
- Informace, co přesně znamenají jednotlivá rozhodnutí, v modelu obecně být nemusí. Pokud dvě různá rozhodnutí vedou do stejného stavu, model to nemusí rozlišovat.

Způsob řešení u acyklického G:

- Každému stavu pro každého hráče přiřadit celkovou výplatu, kterou hráč získá, pokud se hra do daného stavu dostane. Označme takové přiřazení $g : S \mapsto \mathbb{R}^n$.
- Odspodu: v listech jsou výplaty jasné. Vedou-li z nějakého stavu hrany jen do už vyhodnocených uzlů, lze vybrat nejlepší rozhodnutí pro hráče, který se právě rozhoduje. Tedy, vybírá-li se strategie ve stavu s, je $g(s) = g(\arg\max_{u:(s,u)\in R} g(u)_{v(s)})$

Příklad – pistolníci

Situace:

- Tři pistolníci jsou v souboji.
- Pokud jsou na řadě se střelbou, trefí se s pravděpodobnostmi $p_1 = 1/3, p_2 = 1/2, p_3 = 1$.
- Mohou střílet buď na soupeře podle vlastního výběru, nebo do vzduchu ($p = 1$).
- Pokud je některý pistolník zasažen, dál se neúčastní.
- První střílí 1, pak 2, účastní-li se ještě, pak 3 účastní-li se ještě, pak 1, účastní-li se ještě, atd.

Cíl: maximalizovat pravděpodobnost, že v souboji zůstane jako poslední.
Otázka: na koho má střílet první pistolník?

Zjednodušující předpoklady:

- pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3,
- pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2,
- pokud jsou naživu již jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.

.

Volební (hlasovací) hry

Situace:

- Máme parlament o m křeslech, ve kterém je n politických stran s počty mandátů $a_1, \ldots, a_n$.
- Pro přijetí návrhu v parlamentu je třeba k hlasů, kde $k > \alpha m$ pro nějaké $0 \leq \alpha \leq 1$.
- Parametr α se nazývá *hlasovací pravidlo.*
- Platí (ne)rozumné předpoklady: členové stran hlasují jednotně, členové koalic hlasují jednotně, všechny koalice jsou stejně pravděpodobné.

Cíl:

- uvažovat situaci jako kooperativní hru a odhadnout sílu hráčů v konfliktu
- charakteristická funkce koalice K bude zřejmě

$$v(K) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \sum_{i \in K} a_k > \alpha m \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad – volební hry

Zadání: Mějme politické strany s počty mandátů $50, 30, 60$. Spočtěme, jak se mění

- Shapley-Shubikův index síly (Shapleyova hodnota), a
- Banzhafův index síly (Shapleyova hodnota s jednotkovými váhami)

v závislosti na hlasovacím pravidle α.

Indexy síly:

- $S_i = \{K \subseteq N : v(K) = 1 \wedge v(K \setminus \{i\}) = 0\}$ pro všechna $i \in N$, $e_i = |S_i|$.
- Shapley-Shubik:
$$s_i = \sum_{K \subseteq S_i} \frac{(|K|-1)!(n-|K|)!}{n!},$$
- Banzhaf:
$$\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{j \in N} e_j}$$