4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Kooperativní hry

Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze

10. listopadu 2015

Kooperace

Kooperace znamená uzavírání závazných dohod o volbě strategií a případně o dělení výhry.

Kooperativní hra – hra ve které je kooperace přípustná.

Dva základní druhy kooperativních her:

- s přenosnou výhrou – výhry jednotlivých hráčů je možné jakkoli rozdělovat,
- s nepřenosnou výhrou – každý hráč obdrží hodnotu své výplatní funkce.

Omezíme se na hry s přenosnou výhrou.

Koalice a koaliční struktura

Mějme kooperativní hru n hráčů. Množina všech hráčů se značí N.

Koalice je jakákoli neprázdná podmnožina K množiny N.

- Koalice mohou být i jednoprvkové.
- (Z technických důvodů je někdy výhodné připouštět i prázdné koalice, na to vždy upozorníme.)
- Počet možných koalic je zřejmě $2^n - 1$.
- Množina všech koalic se bude značit 2^N.

Koaliční struktura je množina koalic.

Příklad

Mějme hru s $n = 3$. Možné koalice zřejmě jsou $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$.
Možné koaliční struktury jsou např. $\{\{1\}\}, \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ atd.

Dělení her podle přípustnosti koaličních struktur

- Hry s volnou nedisjunktní koaliční strukturou.
  - přípustné jsou i takové struktury, kde může být hráč ve více koalicích
  - počet takových koaličních struktur je $2^{2^n-1}-1$
- Hry s (volnou) disjunktní koaliční strukturou.
  - každý hráč musí být právě v jedné koalici
  - počet koaličních struktur?
- Hry s omezenou koaliční strukturou.
  - koaliční struktury musí splňovat nějaké další požadavky.

Příklad – omezená koaliční struktura

Mějme rozumně se chovající politickou scénu se stranami Pravice, Střed a Levice, kde názvy stran v sobě nesou informaci o ideologickém založení:
Rozumná hra s omezenou koaliční strukturou by patrně připustila jen koalice {Pravice, Střed} a {Levice, Střed} (a jednoprvkové)

Dělení her podle přípustnosti koaličních struktur

- Hry s volnou nedisjunktní koaliční strukturou.
  - přípustné jsou i takové struktury, kde může být hráč ve více koalicích
  - počet takových koaličních struktur je $2^{2^n-1}-1$
- Hry s (volnou) disjunktní koaliční strukturou.
  - každý hráč musí být právě v jedné koalici
  - počet koaličních struktur?
- Hry s omezenou koaliční strukturou.
  - koaliční struktury musí splňovat nějaké další požadavky.

Příklad – omezená koaliční struktura

Mějme rozumně se chovající politickou scénu se stranami Pravice, Střed a Levice, kde názvy stran v sobě nesou informaci o ideologickém založení:
Rozumná hra s omezenou koaliční strukturou by patrně připustila jen koalice {Pravice, Střed} a {Levice, Střed} (a jednoprvkové)

Dále jen hry s volnou disjunktní koaliční strukturou.

Disjunktní koaliční struktura – souvislosti

Kolik je možných disjunktních koaličních struktur?

Ekvivalentní otázky:

- Máme množinu n prvků, kterou chceme rozdělit do neprázdných podmnožin. Kolik takových možných dělení je?
- Máme číslo $X \in \mathbb{N}$, které je součinem n různých prvočísel. Kolik existuje způsobů, jak faktorizovat X?
- Kolik je možných rýmových schémat u strofy dlouhé n řádků?
  - pro $n = 4$

Disjunktní koaliční struktura – souvislosti

Kolik je možných disjunktních koaličních struktur?

Ekvivalentní otázky:

- Máme množinu n prvků, kterou chceme rozdělit do neprázdných podmnožin. Kolik takových možných dělení je?
- Máme číslo $X \in \mathbb{N}$, které je součinem n různých prvočísel. Kolik existuje způsobů, jak faktorizovat X?
- Kolik je možných rýmových schémat u strofy dlouhé n řádků?
    - pro $n = 4$ jsou to schémata `AAAA, AAAB, AABA, AABB, AABC, ABAA, ABAB, ABAC, ABBA, ABBB, ABBC, ABCA, ABCB, ABCC, ABCD.`

Disjunktní koaliční struktury – rekurentní výpočet

Odvození B_{n+1}:
$\{1$

- Začněme s libovolným pevným prvkem, třeba prvkem 1.

Disjunktní koaliční struktury – rekurentní výpočet

Odvození B_{n+1}:

$\{1\}, \underbrace{\ldots}_{B_n}$

- Začněme s libovolným pevným prvkem, třeba prvkem 1.
- Nyní máme možnost množinu
  - uzavřít; pak nám zbývá n prvků, které můžeme umístit B_n způsoby; nebo

Disjunktní koaliční struktury – rekurentní výpočet

Odvození B_{n+1}:

$$\{1, \underbrace{\ldots}_{\binom{n}{i}}\}, \underbrace{\ldots}_{B_{n-i}}$$

- Začněme s libovolným pevným prvkem, třeba prvkem 1.
- Nyní máme možnost množinu
  - uzavřít; pak nám zbývá n prvků, které můžeme umístit B_n způsoby; nebo
  - obecněji, doplnit o i dalších prvků a pak uzavřít; pak nám zbude $(n-i)$ prvků, které lze umístit B_{n-i} způsoby; i prvků můžeme z n vybrat $\binom{n}{i}$ způsoby.

Disjunktní koaliční struktury – rekurentní výpočet

Odvození B_{n+1}:

$$\{1, \underbrace{\ldots}_{\binom{n}{i}}\}, \underbrace{\ldots}_{B_{n-i}}$$

- Začněme s libovolným pevným prvkem, třeba prvkem 1.
- Nyní máme možnost množinu
  - uzavřít; pak nám zbývá n prvků, které můžeme umístit B_n způsoby; nebo
  - obecněji, doplnit o i dalších prvků a pak uzavřít; pak nám zbude $(n-i)$ prvků, které lze umístit B_{n-i} způsoby; i prvků můžeme z n vybrat $\binom{n}{i}$ způsoby.
- K pevně zvolenému prvku tedy přihodíme 0 až n dalších prvků; tyto prvky můžeme vybrat $\binom{n}{0}$ až $\binom{n}{n}$ způsoby. Pevně zvolený první prvek zaručuje unikátnost této první množiny. Zbytek se dá rozdělit B_{n-n} až B_{n-0} způsoby.

Disjunktní koaliční struktury – rekurentní výpočet

Odvození B_{n+1}:

$\{1, \underbrace{\ldots}_{\binom{n}{i}}\}, \underbrace{\ldots}_{B_{n-i}}$

- Začněme s libovolným pevným prvkem, třeba prvkem 1.
- Nyní máme možnost množinu
  - uzavřít; pak nám zbývá n prvků, které můžeme umístit B_n způsoby; nebo
  - obecněji, doplnit o i dalších prvků a pak uzavřít; pak nám zbude $(n-i)$ prvků, které lze umístit B_{n-i} způsoby; i prvků můžeme z n vybrat $\binom{n}{i}$ způsoby.
- K pevně zvolenému prvku tedy přihodíme 0 až n dalších prvků; tyto prvky můžeme vybrat $\binom{n}{0}$ až $\binom{n}{n}$ způsoby. Pevně zvolený první prvek zaručuje unikátnost této první množiny. Zbytek se dá rozdělit B_{n-n} až B_{n-0} způsoby.

Platí $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$.

Bellovo a Stirlingovo číslo

Počty dělení na neprázdné podmnožiny

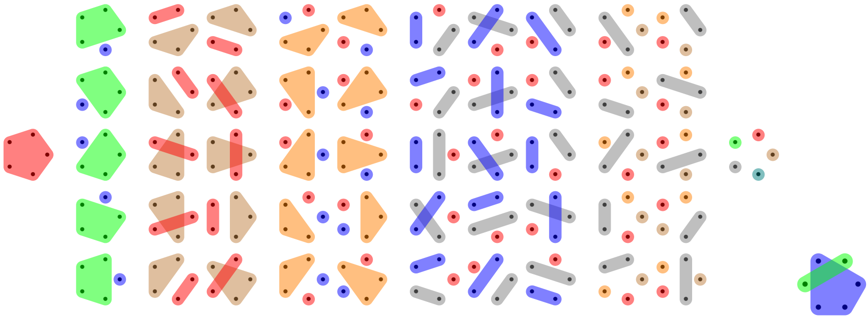
Stirlingovo číslo: počet rozkladů n-prvkové množiny na k podmnožin

- značení a výpočet: $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$

Bellovo číslo: počet (libovolných) rozkladů n-prvkové množiny

- značení a výpočet: $B_n = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n \atop i} \right\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$

Řada Bellových čísel: $(B_0 =)$ 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, …



Žádoucí řešení kooperativní hry

Žádoucí řešení: poskytnout návod k jednání.

Co je návod k jednání?

1. Do jaké koalice by měl který hráč vstoupit? (Jaká koaliční struktura se má vytvořit?)
2. Jak by se každý hráč měl v rámci koalice měl chovat?
3. Jak by se měl v rámci jednotlivých koalic rozdělit zisk?

(Stejné jako u bimaticových her.)

Otázky spolu souvisí, je třeba je řešit současně.

Možnost řešení 1 – hra v normálním tvaru

- Pro každou koaliční strukturu, dejme tomu strukturu $L = \{K_1, \dots, K_l\}$, nutno řešit hru l hráčů.
- Pro každou koalici v každé koaliční struktuře je nutné navrhnout dělení zisku – z jednotlivých koalic získáme dělení $(a_1, \dots, a_n)$
- Koaliční struktura L může vzniknout tehdy, pokud je toto dělení lepší než dělení v jakékoli jiné struktuře – neexistuje skupina hráčů, která by měla motivaci strukturu měnit

Problémy:

- výpočetní složitost – koaličních struktur je mnoho
- nejednoznačnost – nemusí dávat jednoznačný návod k jednání (viz bimaticové hry)
- neexistence řešení – nemusí existovat *žádná* vyhovující L

Charakteristická funkce

Charakteristická funkce je funkce $v : 2^N \mapsto \mathbb{R}$.

- Přiřazuje hodnotu (*sílu*) každé koalici.
- Hodnota $v(K)$ vyjadřuje, jaká je (zhruba) výhra koalice K, pokud vznikne.

Většinou se požaduje superaditivita. (My ji zde požadujeme.) *Superaditivita* – jestliže pro každé dvě disjunktní koalice $K, L \subseteq N$ platí $v(K) + v(L) \leq v(K \cup L)$, je v superaditivní.

Aditivita – pokud $v(K) + v(L) = v(K \cup L)$, je v aditivní. Hra s aditivní v je *nepodstatná* – kooperace nic nepřinese.

Charakteristická funkce

Charakteristická funkce je funkce $v : 2^N \mapsto \mathbb{R}$.

- Přiřazuje hodnotu (*sílu*) každé koalici.
- Hodnota $v(K)$ vyjadřuje, jaká je (zhruba) výhra koalice K, pokud vznikne.

Většinou se požaduje superaditivita. (My ji zde požadujeme.)
Superaditivita – jestliže pro každé dvě disjunktní koalice $K, L \subseteq N$ platí $v(K) + v(L) \leq v(K \cup L)$, je v superaditivní.

Aditivita – pokud $v(K) + v(L) = v(K \cup L)$, je v aditivní. Hra s aditivní v je *nepodstatná* – kooperace nic nepřinese.

Dále jen superaditivita.

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$
\begin{array}{lll}
v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 20 & \\
v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 40 \\
v(\{3\}) = 20 & v(\{2,3\}) = 30 &
\end{array}
$$

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 20 & \\ v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 40 \\ v(\{3\}) = 20 & v(\{2,3\}) = 30 & \end{array}$$

Hra je aditivní:

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) + v(\{2\}) = 20 = v(\{1,2\}) & v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 40 = v(\{1,2,3\}) \\ v(\{1\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{1,3\}) & v(\{1,3\}) + v(\{2\}) = 40 = v(\{1,2,3\}) \\ v(\{2\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{2,3\}) & v(\{2,3\}) + v(\{1\}) = 40 = v(\{1,2,3\}) \end{array}$$

$$(\ v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 40 = v(\{1,2,3\})\ )$$

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$v(\{1\}) = 10 \qquad v(\{1,2\}) = 19$$
$$v(\{2\}) = 10 \qquad v(\{1,3\}) = 30 \qquad v(\{1,2,3\}) = 40$$
$$v(\{3\}) = 20 \qquad v(\{2,3\}) = 30$$

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$\begin{array}{lll} v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 19 & \\ v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 40 \\ v(\{3\}) = 20 & v(\{2,3\}) = 30 & \end{array}$$

Hra je neaditivní:

$$\begin{array}{ll} v(\{1\}) + v(\{2\}) = 20 > v(\{1,2\}) & v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\}) \\ v(\{1\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{1,3\}) & v(\{1,3\}) + v(\{2\}) = 40 = v(\{1,2,3\}) \\ v(\{2\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{2,3\}) & v(\{2,3\}) + v(\{1\}) = 40 = v(\{1,2,3\}) \end{array}$$

$$\left(v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\}) \right)$$

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$
\begin{aligned}
v(\{1\}) &= 10 & \qquad v(\{1,2\}) &= 20 & & \\
v(\{2\}) &= 10 & \qquad v(\{1,3\}) &= 30 & \qquad v(\{1,2,3\}) &= 41 \\
v(\{3\}) &= 20 & \qquad v(\{2,3\}) &= 30 & &
\end{aligned}
$$

Příklad – (super)aditivita

Mějme hru tří hráčů s následující char. funkcí v:

$$
\begin{array}{lll}
v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 20 & \\
v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 41 \\
v(\{3\}) = 20 & v(\{2,3\}) = 30 &
\end{array}
$$

Hra je superaditivní:

$$
\begin{array}{ll}
v(\{1\}) + v(\{2\}) = 20 = v(\{1,2\}) & v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\}) \\
v(\{1\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{1,3\}) & v(\{1,3\}) + v(\{2\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\}) \\
v(\{2\}) + v(\{3\}) = 30 = v(\{2,3\}) & v(\{2,3\}) + v(\{1\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\})
\end{array}
$$

$$
(\ v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 40 \leq v(\{1,2,3\})\ )
$$

Možnost řešení 2 – hra ve tvaru char. funkce

Buď dána množina hráčů N a charakteristická funkce v definovaná na 2^N.
Dvojice (N, v) se nazývá *hra ve tvaru charakteristické funkce*.

Předpoklady:

- Hodnoty charakteristické funkce je nutné znát (kupodivu).
  - buď zvenku,
  - nebo výpočtem z normálního tvaru (viz dále)
- Musí být zřejmé, jak se mají hráči v rámci koalice chovat – odpadá otázka 2.

Výpočet char. fce z normálního tvaru

Chceme-li vypočítat hodnoty v z normálního tvaru pro koalici K, musíme vyslovit nějaké předpoklady o chování hráčů z $N \setminus K$. Můžeme totiž ovlivnit pouze strategie hráču v K.

Stejně jako v bimaticových hrách máme možnosti

- počítat zaručenou výhru, *minimaxová* char. fce.
- počítat *kompetitivní* char. fce.
- počítat char. fci. vycházející z *principu nedostatečné evidence* – obecně „těžké“

Nechť $K = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq N$. Značme $X(K) = X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_l}$.
Značme $x(K) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in X(K)$.

Minimaxová charakteristická funkce

Nechť $K \subset N$, pak

$$v(K) = \max_{X(K)} \min_{X(N \setminus K)} \sum_{i \in K} f_i(x_1, \ldots, x_n),$$

a

$$v(N) = \max_{X(N)} \sum_{i \in N} f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Příběh:

- pokud je hra aditivní, pak je minimaxová v rozumná
- hráči se dohadují a hrozí si, že si budou škodit
- síla odpovídá minimální výhře koalice

Výhoda: minimaxová v je superaditivní (a obráceně, každá superaditivní v má svou hru v normálním tvaru)
Nevýhoda: hodnoty mohou být *velmi* podhodnocené

Kompetitivní charakteristická funkce – 1

Výpočet $v(K)$ jako výhry K ve hře dvou hráčů v normálním tvaru

$$H = \left\{ \{K, N \setminus K\}, \{X(K), X(N \setminus K)\}, \left\{ \sum_{i \in K} f_i, \sum_{i \in N \setminus K} f_i \right\} \right\}$$

Příběh:

- pokud se koalice K utvoří, ostatní vytvoří protikoalici, která se bude chovat racionálně (srovnej s minimaxovou v)
- síla odpovídá situaci, kdy vzniknou právě dvě koalice

Výhoda: méně podhodnocené (blíží se analýze normálního tvaru)
Nevýhoda: složitost, nemusí existovat racionální návod k jednání v jednotlivých dílčích hrách

Kompetitivní charakteristická funkce – 2

Předpoklad: známé a jednoznačné řešení při nekooperaci x^*

$$v(K) = \max_{X(K)} \{ \sum_{i \in K} f_i(x_1, \dots, x_n) : x_j = x_j^*,\ j \in N \setminus K \}$$

Příběh: síla odpovídá situaci, kdy vznikne právě jedna koalice

Výhoda: jednoduchost pro rozumné f_i
Nevýhoda: nemusí existovat řešení při nekooperaci

Příklad hry ve tvaru char. funkce

Některé hry mohou být formulovány přímo ve tvaru charakteristické funkce:

Mějme jednovýrobkový trh s p výrobci a q odběrateli, kteří tvoří množinu hráčů $\{1, \dots, p+q\}$.

- U každého hráče známe požadované množství výrobku t_i a vyráběné množství s_i.
- Pro odběratele $s_i = 0$, pro výrobce $t_i = 0$.

Dodavatelé a odběratelé se sdružují do koalic, výhra koalice je závislá na množství výrobku, které dodavatelé prodají odběratelům~~, a dále, čím, větší koalice, tím hůře~~.

Konkrétně:

$$v(K) = \frac{\min\{\sum_{i \in K} s_i, \sum_{i \in K} t_i\}}{\cancel{|K|}}$$

Dělení výhry

Vznikne-li ve hře koaliční struktura $L = \{K_1, \ldots, K_l\}$, pak vektor $(a_1, \ldots, a_n)$ budeme nazývat *rozdělením*, pokud pro $K_i \in L$ bude platit $\sum_{j \in K_i} a_j = v(K_i)$.

- Každý hráč zřejmě usiluje o to, aby získal co nejvíce.
- Jsou-li hráči i a j členy koalice K, chtějí z $v(K)$ získat co nejvíce – jejich zájmy jsou protichůdné.

Je nutné najít nějaké kompromisní řešení. To by mělo splňovat přinejmenším,

- že dělená výhra by měla být co největší – *princip kolektivní racionality*, a
- že koalice, v rámci níž se výhra dělí, by neměla mít motivaci rozpadnout se na menší celky – *princip skupinové stability*.
- že každý hráč chce alespoň tolik, kolik by si zajistil sám – *princip individuální racionality*

Princip kolektivní racionality – tvorba koalic

Snaha o ustanovení koalice (viz dále) $K_1 = \arg\max_{K \subseteq N} v(K)$. Neobsahuje-li všechny hráče, pokračuje se stejným způsobem dále.

Problém: u superaditivních her může být výhodné přijmout do koalice i hráče se zápornou $v(i)$
Řešení: Je výhodné vytvářet koalici N.

Více na cvičení.

C-jádro

Pro koalici K se zkoumá, zda existuje řešení soustavy

$$\sum_{i \in K} a_i = v(K)$$

$$\sum_{i \in Q} a_i \geq v(Q) \qquad Q \subseteq K$$

- Pokud ano, je K skupinově stabilní.
- Nemusí existovat. Je-li prázdné, koalice nevznikne.
- Nedává jednoznačný návod k jednání.
- Nejednoznačnost lze odstranit – např. lze použít těžiště jádra – výpočetně složité.

C-jádro – příklady.

$$
\begin{array}{lll}
v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 20 & \\
v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 20 & v(\{1,2,3\}) = 30 \\
v(\{3\}) = 10 & v(\{2,3\}) = 20 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 30 & \\
v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 30 & v(\{1,2,3\}) = 40 \\
v(\{3\}) = 10 & v(\{2,3\}) = 30 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
v(\{1\}) = 10 & v(\{1,2\}) = 25 & \\
v(\{2\}) = 10 & v(\{1,3\}) = 25 & v(\{1,2,3\}) = 50 \\
v(\{3\}) = 10 & v(\{2,3\}) = 25 &
\end{array}
$$

Námitky proti dělení

- Mějme koalici N a rozdělení zisku a.
- Jednotlivé koalice mohou být více či méně nespokojené rozdělením a.
- Pro koalici $K \subseteq N$ definujme $d(a, K) = v(K) - \sum_{i \in K} a_i$
- Zřejmě: pokud $d(a, K) > 0$, může K rozdělení a vetovat (požaduje-li se skupinová stabilita)

Jedna z možností práce s námitkami:

- Při diskuzi o a bude nejvíce namítat koalice K s největším $d(a, K)$.
- Rozdělení x je přijatelnější než rozdělení y, pokud $\max_{K \subseteq N} d(x, K) < \max_{K \subseteq N} d(y, K)$.
- Definujme $T(a) = (T_1(a), \ldots, T_{2^{|S|}-1}(a))$, kde jednotlivé složky jsou sestupně seřazené námitky proti rozdělení a.

N-jádro

Vektor $T(x)$ je *lexikograficky menší* než $T(y)$, pokud první nenulová složka vektoru $T(x) - T(y)$ je záporná (první rozdílná složka je menší u $T(x)$).

- Předpoklad: hráči se snaží o individuálně a kolektivně racionální řešení.
- *N-jádro*: takové rozdělení a, že $T(a)$ je lexikograficky nejmenší.

Výhody: Lze najít pomocí LP. Je jednoznačné. Vždy existuje.
Nevýhody: Nemusí být skupinově stabilní.

Budeme řešit na cvičení.

Shapleyova hodnota

Nesnaží se stanovit dělení výhry, pouze hodnotí sílu (pozici) hráče v konfliktu. Dodefinujeme $v(\emptyset) = 0$.
Superaditivita a koaliční struktura $\{N\}$: Shapleyova hodnota dává „rozumné“ rozdělení výhry.
Idea:

- koalice N se může na základě pořadí příchodů hráčů vytvořit $n!$ způsoby.
- přínos hráče i ke koalici K je $p(i, K) = v(K) - v(K \setminus \{i\})$.
- koalice $K \setminus \{i\}$ může vzniknout $(|K| - 1)!$ způsoby, zbylí hráči se do koalice K mohou přidat $(n - |K|)!$ způsoby
- pravděpodobnost, že hráč i bude mít přínos $p(i, K)$ je $(n - |K|)!(|K| - 1)!/n!$.

Shapleyova hodnota: střední hodnota přínosů hráče i přes všechny koalice obsahující i:

$$s(i) = \sum_{K \subseteq N, i \in K} \frac{(n - |K|)!(|K| - 1)!}{n!}(v(K) - v(K \setminus \{i\}))$$

Vlastnosti Shapleyovy hodnoty

- Závisí jen na v, ne na označení hráčů.
- $\sum_{i \in N} s(i) = v(N)$ a $s(i) \geq v(\{i\})$ pro $i \in N$ (při superaditivitě kolektivní a individuální racionalita).
- Součet Shapleyových hodnot dvou her dává Shapleyovu hodnotu pro součet char. fcí těchto her.
- Pokud má i-tý hráč nulové přínosy do všech koalic, je $s(i) = 0$.

Shapleyova hodnota je jediný n-složkový vektor, který má vlastnosti výše!

Shrnutí

Charakteristické funkce:

- minimaxová
- kompetitivní

Principy:

- kolektivní racionalita
- skupinová stabilita
- individuální racionalita

Řešení kooperativních her

- C-jádro
- N-jádro
- Shapleyova hodnota