

4EK421 – zadání bonusových úkolů z 5. cvičení

Odevzdání a hodnocení. Úkol se odevzdává emailem na `miroslav.rada@vse.cz` do 1.11. 23:59.

Úkol je možné odevzdávat po jednotlivých úlohách (a na vyzvání k opravě i opakovaně).

Maticová hra – hledání NE pomocí zaručené výhry. (3 body)

Mějme maticovou hru H zadanou výplatní maticí $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$. Prostory strategií jednotlivých hráčů jsou $X = \{1, \dots, m_1\}$ a $Y = \{1, \dots, m_2\}$.

Dokažme, že hra H má Nashovo ekvilibrium (v ryzích strategiích) tehdy a jen tehdy, pokud platí

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} a_{xy} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} a_{xy}.$$

Maticová hra – smíšené rozšíření, nezápornost matice. (4 body)

Mějme maticovou hru H s výplatní maticí $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$. Víme, že za předpokladu, že $A > 0$, lze Nashovo ekvilibrium v smíšeném rozšíření zjistit z optimálního řešení úlohy lineárního programování

$$\max_{q \in \mathbb{R}^{m_2}} \{1^T q : Aq \leq 1, q \geq 0\}. \quad (1)$$

Prostudujte (v prezentaci ze druhého cvičení (velmi stručně) nebo v literatuře) odvození lineárního programu 1 a zjistěte z čeho požadavek $A > 0$ vyplývá.

Kooperativní bimaticová hra – dělení výhry. (3 body)

Jeden z navržených způsobů pro dělení výhry v kooperativní bimaticové hře je takový, že se výhra koalice rozdělí podle poměru přínosů, které jednotliví hráči pro koalici mají. Konkrétně, označíme-li hodnoty charakteristické funkce symboly $v(\{1\})$, $v(\{2\})$, $v(\{1, 2\})$ a označíme-li dohodnuté podíly hráčů na celkové výhře a_1, a_2 , je *dělení podle poměru přínosů* takové dělení celkové výhry koalice, které splňuje vztah $a_1 : a_2 = (v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) : (v(\{1, 2\}) - v(\{1\}))$.

Dokažte, že je dělení podle poměru přínosů prvkem jádra hry.

Hra o dělitelné zakázky – ekvilibrium. (5 bodů)

Uvažujme hru o dělitelné zakázce z prezentace ze druhého cvičení (slide 15), diskutovanou také na pátém cvičení. Dokažte, že strategie

$$a^* = \begin{pmatrix} \frac{as_1}{s} \\ \vdots \\ \frac{as_3}{s} \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} \frac{bs_1}{s} \\ \vdots \\ \frac{bs_3}{s} \end{pmatrix}$$

jsou Nashovým ekvilibriem této hry.