

# 4EK421 – oligopol – řešení

## 1 Oligopol

**Zadání.** Mějme hru  $((1, 2, 3), ([0, k_1], [0, k_2], [0, k_3]), (f_1, f_2, f_3))$ , kde

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i c(x_1, x_2, x_3) - (n_i + v_i x_i)$$

pro  $i = 1, 2, 3$  a  $c(x_1, x_2, x_3) = 6 - 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$ . Parametry  $k, v, n$  pro jednotlivé hráče udává následující tabulka.

$i$	$n_i$	$v_i$	$k_i$
1	3	0.5	6
2	2	0.75	3
3	1	2.5	2

Předpokládejme, že hráči nespolupracují. Nalezněme NE.

**Interpretace zadání.** Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu. Hráč  $i$  má kapacitu výroby  $k_i$ , fixní náklady  $n_i$ , variabilní náklady  $v_i$ ; funkce  $f_i$  je jeho zisková funkce, skládající se z příjmů z prodeje a nákladů. Funkce  $c$  je cena, závisující na celkovém vyrobeném množství.

**Idea hledání NE.** NE je taková trojice přípustných výrobních množství  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , že pro každé  $i = 1, 2, 3$  a každé  $x_i \in [0, k_i]$  platí

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_3^*) \leq f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*).$$

Pro pevné  $i$  nerovnost říká, že  $i$ -tý hráč nemůže dosáhnout lepší výplaty, pokud se odchýlí od množství  $x_i^*$ . Jednotlivé hodnoty  $f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  tedy musí být maximální v následujícím smyslu:

$$\max_{x_1 \in [0, k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

$$\max_{x_2 \in [0, k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*) = f_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

$$\max_{x_3 \in [0, k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3) = f_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*),$$

Každá z rovností, řekněme  $i$ -tá, tedy předepisuje hodnotu maxima funkce jedné proměnné  $x_i$  na prostoru strategií  $i$ -tého hráče. Vyhovující  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  lze tedy získat řešením následující soustavy rovností

$$\begin{aligned} x_1^* &= \arg \max_{x_1 \in [0, k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*), \\ x_2^* &= \arg \max_{x_2 \in [0, k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*), \\ x_3^* &= \arg \max_{x_3 \in [0, k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3). \end{aligned} \quad (1)$$

**Vlastnosti funkcí  $f_i$  ve vztahu k řešení soustavy (1).** Soustavu ve tvaru (1) by při zcela obecných funkcích  $f_1, f_2, f_3$  mohlo být těžké vyřešit. V našem případě však lze využít toho, že funkce  $f_i$  je v proměnné  $x_i$  (při fixních  $x_j$  pro  $j \neq i$ ) kvadratická a konkávní. Konkávnost lze snadno ověřit výpočtem druhé derivace podle  $x_i$  (ověření jednotlivých kroků výpočtu ponecháváme na laskavém čtenáři):

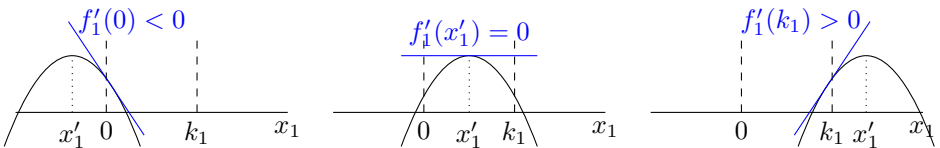
$$\begin{aligned} f_i &= -0.5x_i^2 + (6 - v_i - 0.5 \sum_{j \neq i} x_j)x_i - n_i, \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_i} &= -x_i + 6 - v_i - 0.5 \sum_{j \neq i} x_j, \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_i^2} &= -1. \end{aligned}$$

Konkávní kvadratická funkce  $f$  jedné proměnné  $x$  má v  $\mathbb{R}$  právě jedno maximum, a to pro takové  $x_0$ , pro které je  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$ . Tento poznatek však nelze pro řešení soustavy (1) použít přímo, protože se zde maxima hledají pouze na intervalech určených povolenými výrobními množstvími jednotlivých hráčů, nikoli v celém  $\mathbb{R}$ .

Uvažujme nyní  $f_1$ . Pro pevně zvolené  $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  mohou ve vztahu k poloze  $x'_1 = \arg \max_{x_1 \in \mathbb{R}} f_1(x_1, x_2, x_3)$  vůči intervalu  $[0, k_1]$  nastat tři případy:

1.  $x'_1 < 0$ , pak zřejmě  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0$ ,
2.  $x'_1 \in [0, k_1]$ , pak zřejmě  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x'_1) = 0$ , nebo
3.  $x'_1 > k_1$ , pak zřejmě  $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0$ .

Ilustrace jednotlivých případů následuje.



Pokud tedy  $x'_1 < 0$ , pro hráče 1 je (při zafixovaných strategiích  $x_2, x_3$ ) optimální strategií  $x_1 = 0$ , pokud  $x'_1 > 0$ , je pro hráče 1 optimální  $x_1 = k_1$ .

**Řešení soustavy (1).** Z diskuze výše je zřejmé, že každou rovnici soustavy (1), řeckně první rovnici, lze přepsat takto:

$$x_1^* = \arg \max_{x_1 \in [0, k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = \begin{cases} 0, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0) < 0, \\ k_1, & \text{pokud } \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(k_1) > 0, \\ x_1', & \text{jinak.} \end{cases} \quad (2)$$

Zápis (2) otevírá prostor ke zformulování soustavy (1) jako soustavy nelineárních (ne)rovností, která bude řešitelná pomocí běžných solverů. Nejprve soustavu zformulujeme a pak vysvětleme, proč je její řešení řešením soustavy (1).

$$\forall i = 1, 2, 3 : \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \leq x_i \leq k_i, \\ 0 = x_i z_i, & 0 \leq y_i, \\ 0 = (k_i - x_i) y_i, & 0 \leq z_i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Mohlo by se zdát, že sady (ne)rovností pro jednotlivá  $i$  jsou na sobě nezávislé. Tomu tak pochopitelně není: v derivacích  $f_i$  podle  $x_i$  se vyskytují všechny proměnné  $x_1, x_2, x_3$ .

Nejdůležitějšími rovnostmi soustavy (3) jsou zřejmě rovnosti  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i$ , které v kombinaci s ostatními rovnostmi kladou jistý požadavek na derivace jednotlivých funkcí  $f_i$ . Jak ale tento požadavek přesně vypadá? Ve skutečnosti vcelku přesně odpovídá rovnici (2). V soustavě jsou pro každé  $i$  zavedeny nezáporné proměnné  $y_i$  a  $z_i$ . Omezení  $x_i z_i = 0$  resp.  $(k_i - x_i) y_i = 0$  zaručují, že  $z_i$  resp.  $y_i$  bude moci být nenulové jen tehdy, pokud  $x_i = 0$  resp.  $x_i = k_i$ . Tedy, pokud  $x_i = 0$  resp.  $x_i = k_i$ , pak nenulové  $z_i$  resp.  $y_i$  v souladu s (2) povoluje, aby  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0$  resp.  $> 0$ . Ve všech ostatních případech, tedy pokud  $0 < x_i < k_i$ , rovnice vynucují, aby  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0$ .

Zopakujeme nyní ještě pro jistotu, proč je řešení  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  soustavy (3) zároveň také řešením soustavy (1) a tím i Nashovým ekvilibriem. Podívejme se na libovolné  $x_i^*$ . Pokud

- $x_i^* = 0$ , pak  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \leq 0$ ; ke zlepšení hodnoty  $f_i$  by proto mohlo dojít pouze při snižování  $x_i^*$ , to ale lze pouze zvyšovat, což se nevyplatí,
- $x_i^* = k_i$ , pak  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) \geq 0$ ; ke zlepšení hodnoty  $f_i$  by proto mohlo dojít pouze při zvyšování  $x_i^*$ , to ale lze pouze snižovat, což se nevyplatí,
- $0 < x_i^* < k_i$ , pak  $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i^*) = 0$  a  $x_i^*$  se proto nevyplatí měnit.

**Optimalizační verze.** Soustava (3) obsahuje nelineární omezení, což může její řešení solverům zkomplikovat (byť je alespoň teoreticky možné). Může proto být výhodné přesunout tato omezení do účelové funkce.

Nelineární omezení jsou dvou typů:  $x_i z_i = 0$  a  $(k_i - x_i) y_i = 0$ . Všimněme si, že na všechny činitele, které se v nelineárních omezeních vyskytují, jsou jinými omezeními

kladeny požadavky na nezápornost. Nezáporné jsou tedy jistě všechny jejich součiny. To otevírá možnost místo soustavy (3) řešit optimalizační úlohu

$$\text{minimalizovat } \sum_{i=1}^3 x_i z_i + (k_i - x_i) y_i$$
$$\text{vzhledem k } \forall i = 1, 2, 3 : \left( \begin{array}{ll} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = y_i - z_i, & 0 \leq z_i \\ 0 \leq x_i \leq k_i, & 0 \leq y_i, \end{array} \right).$$

Zřejmě, optimální hodnota úlohy je 0, které účelová funkce nabývá právě pro ta přípustná řešení, která jsou řešeními soustavy (3).

**Řešení úlohy solverem.** Zbylou část práce, tj. použít nějaké vhodné solver na konkrétní data, si ponechejme jako cvičení.