4EK421 – cvičení č. 3 – bimaticové hry

Ryzí strategie. Nalezněte Nashova ekvilibria v ryzích strategiích u následujících bimaticových her. Vypište jednotlivé dvojice rovnovážných strategií jednotlivých hráčů a jejich výplatní funkce.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & 20,12 & 20,10 \\ 27,15 & 36,\ 6 & 42,10 \\ 25,15 & 40,12 & 35,\ 5 \\ 2,30 & 2,\ 0 & 2,10 \\ 22,30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & 16,14 & 16,10 \\ 27,13 & 33,\ 7 & 40,10 \\ 23,13 & 36,14 & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix} \qquad C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie. Uvažujte bimaticovou hru zadanou dvojmaticí C_4.

1. Nalezněte alespoň jedno Nashovo ekvilibrium v jejím smíšeném rozšíření. Můžete použít jednu z formulací níže.
2. Jaké budou rovnovážné strategie jednotlivých hráčů? Jaké budou jejich výplatní funkce?
3. Pokuste se nalézt Nashových ekvilibrií více.

Kooperace s přenosnou výhrou. Uvažujte bimaticovou hru zadanou dvojmaticí C_1. Předpokládejte, že se jedná o kooperativní hru s přenosnou výhrou.

1. Spočtěte hodnoty charakteristické funkce pro jednotlivé hráče i pro jejich koalici. Charakteristickou funkci spočítejte ve dvou variantách (viz slidy).
2. Pro obě zvolené varianty charakteristické funkce určete, jak vypadá jádro hry a zda je pro hráče výhodné kooperovat.
3. Pokud je pro hráče kooperace výhodná, navrhněte nějaké vhodné dělení celkové výhry, které považujete za spravedlivé.

Nelineární program pro nalezení NE. Pro nalezení NE ve smíšeném rozšíření bimaticové hry lze použít následující program:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} F(x_1, x_2) = \sum_{i \in X_1, j \in X_2} x_{1i}(a_{ij} + b_{ij})x_{2j} - \beta - \alpha \\
\sum_{j \in X_2} a_{ij} x_{2j} \leq \alpha, \qquad \forall i \in X_1 \\
\sum_{i \in X_1} b_{ij} x_{1i} \leq \beta, \qquad \forall j \in X_2 \\
x_{1i}, x_{2j} \geq 0, \qquad i \in X_1, j \in X_2 \\
\sum_{i \in X_1} x_{1i} = \sum_{j \in X_2} x_{2j} = 1
\end{aligned}
$$

V maticové podobě:

$$
\begin{aligned}
\max_{x_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, x_2 \in \mathbb{R}^{m_2}} F(x_1, x_2) &= x_1^\mathsf{T}(A + B)x_2 - \alpha - \beta \\
Ax_2 &\leq \alpha \\
B^\mathsf{T} x_1 &\leq \beta \\
x_1, x_2 &\geq 0 \\
1^\mathsf{T} x_1 = 1^\mathsf{T} x_2 &= 1
\end{aligned} \tag{1}
$$

Věta 1. *Nechť je (x_1, x_2) optimální řešení úlohy (1).*

Pak $F(x_1, x_2) = 0$ a (x, y) jsou NE bimaticové hry zadané výplatními maticemi A a B.