4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

p-inteligence a paradoxy teorie užitku

Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze

23. listopadu 2016

Obsah

Motivace – chovají se hráči v reálu racionálně?

Zdroje chyb

- různé modely – všichni se chovají optimálně, ale v jiných hrách
- omezené zdroje
- iracionalita

Navenek se to vše může jevit stejně!

Motivace – chovají se hráči v reálu racionálně?

Zdroje chyb

- různé modely – všichni se chovají optimálně, ale v jiných hrách
- omezené zdroje
- iracionalita

Navenek se to vše může jevit stejně!

Definice

Hráč, který se s pravděpodobností p chová racionálně a s pravděpodobností $(1 - p)$ *náhodně*, se nazývá p-inteligentní.

Motivace – chovají se hráči v reálu racionálně?

Zdroje chyb

- různé modely – všichni se chovají optimálně, ale v jiných hrách
- omezené zdroje
- iracionalita

Navenek se to vše může jevit stejně!

Definice

Hráč, který se s pravděpodobností p chová racionálně a s pravděpodobností $(1 - p)$ *náhodně*, se nazývá p-inteligentní.

Netvrdí se, že by se hráč rozhodoval, zda se bude chovat racionálně či nikoli, pouze se to tak jeví.

Motivace – chovají se hráči v reálu racionálně?

Zdroje chyb

- různé modely – všichni se chovají optimálně, ale v jiných hrách
- omezené zdroje
- iracionalita

Navenek se to vše může jevit stejně!

Definice

Hráč, který se s pravděpodobností p chová racionálně a s pravděpodobností $(1 - p)$ *náhodně*, se nazývá p-inteligentní.

Netvrdí se, že by se hráč rozhodoval, zda se bude chovat racionálně či nikoli, pouze se to tak jeví.

Definice je neúplná: chybí informace o tom, co to znamená „náhodně".

Dva přístupy

Jak se mají hráči chovat, pokud $p \to 1$?
Je otázkou, zda p-inteligentní hráč je schopen pracovat s informací, že jsou v konfliktu p-inteligentní hráči.

- ryzí přístup
  - hráč se neumí přizpůsobit nové strategii, můžeme se rozhodovat jako při riziku
  - „jak by mohl hlupák poznat, že hraji neoptimálně?“
- smíšený přístup
  - hráč se přizpůsobuje nové strategii
  - dobré chování při $p \to 1$

Maticové hry

Situace:

- Hráči hrají maticovou hry (ve smíšeném rozšíření) $((1,2),(X,Y),(x^s Ay^s, -x^s Ay^s))$ určenou maticí A
- Ve hře existuje (jednoznačné) ekvilibrium (x^*,y^*).
- Hráč 1 inteligentní.
- Hráč 2 p-inteligentní.
- Hráč 1 očekává od 2 strategii $y' = py^* + (1-p)r$, $r = (1/n, \ldots, 1/n)$.

Cíl:

- V pozici hráče 1 vybrat „rozumnou“ strategii.

Řešení:

- Ryzí přístup: $i = \arg\max_i a_i.y'$, optimální smíšená strategie e_i (tj. i-tý jednotkový vektor).
- Smíšený přístup: $x'^s = px^* + (1-p)e_i$.

Experiment: měření p

Popis:

- Postupně se ukáže 12 matic popisujících nějakou maticovou hru..
- V každé hře jsou dvě sloupcové strategie.
- Hrajeme sloupcové strategie, vždy se rozhodneme pro některou z nich.
- Na rozhodnutí je omezený čas.
- (Čísla v maticích jsou naše prohry.)

Cíl:

- Odhadnout naše p.

Hra 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hra 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1.5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hra 3

$$\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 12 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Hra 4

$$\begin{pmatrix} 2.75 & 0.75 \\ 1.75 & 3.75 \end{pmatrix}$$

Hra 5

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hra 6

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 6 \\ 6 & 8 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Hra 7

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix}$$

Hra 8

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -3 \\ -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Hra 9

$$\begin{pmatrix} 1.5 & 3.5 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hra 10

$$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Hra 11

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & -1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Hra 12

$$\begin{pmatrix} 59 & 62 \\ 62 & 60 \\ 61 & 63 \end{pmatrix}$$

Odhad p z napozorovaných strategií v konečné hře

Řekněme, že jsme napozorovali bodový odhad smíšené strategie $y \in \mathbb{R}^m$, přičemž rovnovážná strategie je y^*.

Z definice p-inteligence plyne soustava m lineárních rovnic o jedné neznámé (ačkoli, protože $\mathbf{1}^\mathsf{T} y = \mathbf{1}^\mathsf{T} y^* = 1$, je hodnost matice soustavy nejvýše $m - 1$):

$$y = py^* + (1-p)r,$$

tedy

$$(y^* - r)p = y - r.$$

Tato soustava může snadno být přeurčená — použijme např. nejmenší čtverce.

Poznámky a problémy

Známe-li p a je-li předpoklad o chování p-inteligentního hráče realistický, funguje to hezky.
Pokud p neznáme, nemusí to fungovat vůbec:

- teorie připouští pouze strategie na úsečce ry^* (r je náhodná strategie, y^* rovnovážná strategie).
- odhad p nemusí existovat
- odhad p může být záporný nebo větší než 1

Obsah

Paradox 1

Situace:

- Máme možnost koupit právo účasti v loterii.
- V loterii se háže mincí, dokud nepadne sokol.
- Padne-li sokol v i-tém hodu, je výhra 2^i peněz.

Cíl:

- Určit, kolik jsme ochotni za účast nabídnout.

Paradox 1 – Petrohradský paradox

Očekávaná hodnota výhry:

$$2^1 \frac{1}{2^1} + 2^2 \frac{1}{2^2} + 2^3 \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Očekávávaný užitek:

$$u(2^1) \frac{1}{2^1} + u(2^2) \frac{1}{2^2} + u(2^3) \frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u(2^i)}{2^i},$$

např pro $u(x) = log_2(x)$ je to

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2$$

Paradox 2

Situace:

- Máme vybrat jednu z následujících možností (výhry jsou v milionech):
  Loterie A
  1. vyhrát 1 s pravděpodobností 1, nebo
  2. vyhrát 1 s pravděpodobností 0,89, 0 s pravděpodobností 0,01 a 5 s pravděpodobností 0,1.

Paradox 2

Situace:

- Máme vybrat jednu z následujících možností (výhry jsou v milionech):

Loterie B

1. vyhrát 0 s pravděpodobností 0,89 a 1 s pravděpodobností 0,11, nebo
2. vyhrát 0 s pravděpodobností 0,9 a 5 s pravděpodobností 0,1.

Paradox 2

Situace:

- Máme vybrat jednu z následujících možností (výhry jsou v milionech):
  Loterie A
  1. vyhrát 1 s pravděpodobností 1, nebo
  2. vyhrát 1 s pravděpodobností 0,89, 0 s pravděpodobností 0,01 a 5 s pravděpodobností 0,1.

  Loterie B
  1. vyhrát 0 s pravděpodobností 0,89 a 1 s pravděpodobností 0,11, nebo
  2. vyhrát 0 s pravděpodobností 0,9 a 5 s pravděpodobností 0,1.

Cíl:

- Ukázat iracionalitu současného zvolení voleb A1 a B2.

Paradox 2 – Allaisův paradox

Většina účastníků volila A1 a B2. Tzn. z loterie A vyplynulo:

$$1u(1) > 0{,}89u(1) + 0{,}01u(0) + 0{,}1u(5),$$

a z loterie B:

$$\begin{aligned} 0{,}89u(0) + 0{,}11u(1) &< 0{,}9u(0) + 0{,}1u(5) \\ 0{,}11u(1) &< 0{,}01u(0) + 0{,}1u(5) \\ 1u(1) &< 0{,}89u(1) + 0{,}01u(0) + 0{,}1u(5) \end{aligned}$$

Spor!

Pandořina loterie

Situace:

- Pandora dostala na výběr ze dvou možností.
- Buď otevře schránku A a vyhraje peníze,
- nebo otevře schránku B a vyhraje peníze.
- Pandora jednu ze schránek otevřela, a byly v ní peníze.
- Poté se Pandora dozvěděla, že v jedné ze schránek byl dvojnásobek peněz oproti druhé a usoudila, že kdyby vybrala druhou ze schránek, byla by její očekávaná hodnota výhry o čtvrtinu vyšší, a byla proto smutná.

Cíl:

- Rozhodněte, zda byla smutná oprávněně.