4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Úvodní cvičení

Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze

21. září 2016

Organizace předmětu

- Literatura
  - Dlouhý, Fiala – Teorie ekonomických a politických her (2015)
  - Maňas – Teorie her a její aplikace
  - Turnovec, Chobot – Teória hier a rozhodovania
  - velmi pěkné `materiály` Jana Zouhara (anglicky)
    - tato prezentace je jejich částečným (nedokonalým) překladem
  - webové materiály (wikipedia apod.)
- Podmínky zakončení
  - body ze cvičení ...
  - zkouška ...
  - bude doplněno na `http://hry.polyedr.cz/`
- Kontakt
  - `miroslav.rada@vse.cz`
  - NB 130, linka 5159
  - KH: pondělí 11:00–12:00, středa 16:10–17:50

Hra 1: stánky se zmrzlinou

- Situace:
    - na pláži dlouhé 1 km si konkurují dva zmrzlináři
    - poptávka po zmrzlině je nezávislá na vzdálenosti ke stánku
    - každý zákazník jde ke stánku, který má blíže
- Cíl:
    - maximalizovat tržní podíl

Hra 1: stánky se zmrzlinou

- Situace:
  - na pláži dlouhé 1 km si konkurují dva zmrzlináři
  - poptávka po zmrzlině je nezávislá na vzdálenosti ke stánku
  - každý zákazník jde ke stánku, který má blíže
- Cíl:
  - maximalizovat tržní podíl
- Výsledek:
  - oba zmrzlináři uprostřed pláže

Hra 2: aukce o 10 bodů

- Situace:
  - hráči se účastní aukce o 10 (kladných) bodů ze cvičení
  - draží se pomocí záporných bodů ze cvičení
  - minimální nabídka je 2 body
  - hráči vyvolávají své nabídky, minimální příhoz je 0.5 bodu
  - 10 bodů náleží nejvyšší nabídce

Hra 2: aukce o 10 bodů

- Situace:
  - hráči se účastní aukce o 10 (kladných) bodů ze cvičení
  - draží se pomocí záporných bodů ze cvičení
  - minimální nabídka je 2 body
  - hráči vyvolávají své nabídky, minimální příhoz je 0.5 bodu
  - 10 bodů náleží nejvyšší nabídce

  - hráč s druhou nejvyšší nabídkou body ztrácí také!

Co je to hra?

- Deskové hry, karetní hry, (sport)
  - z historického pohledu přispěly k rozvoji matematiky (např. kostky – pravděpodobnost)
- Hra – specifická rozhodovací situace
  - rozhoduje více než jeden hráč
  - hráči ovlivňují výsledek hry rozhodnutím (strategií)
  - hráčům plyne ze hry zisk (ztráta)
  - zisky hráčů jsou ovlivňovány strategiemi všech hráčů
  - (hráči se chovají racionálně – normativní vs. deskriptivní přístup)

Hra vs. rozhodovací problém

Příklad

4 osoby si objednávají v restauraci. Pokud:

- každý si platí sám ⇒ rozhodovací problém
- každý platí čtvrtinu účtu ⇒ hra

- Rozhodovací problém:
  - jeden rozhodovatel
  - akce jiných rozhodovatelů neovlivňují výplatu

Terminologie teorie her

Teorie her	Ekonomická realita
hra	rozhodovací situace, konflikt
hráč	účastník konfliktu, rozhodovatel
strategie	konkrétní alternativa rozhodovatele
optimální strategie	nejvýhodnější alternativa
prostor strategií	seznam (množina) možných alternativ
výplatní funkce	výsledek v závislosti na alternativách
inteligentní hráč	racionální informovaný rozhodovatel

Prvky hry a klasifikace her

- Hráči
  - počet hráčů: 2 hráči / více hráčů
  - možnosti kooperace: omezená / volná tvorba koalic
  - přítomnost náhodného mechanismu
  - informace: úplná / neúplná
- Strategie
  - velikost prostoru strategií: konečný / nekonečný
  - spojitost prostoru strategií: spojitý / nespojitý
- Výplatní funkce
  - konstatní součet (antagonistický konflikt) / nekonstantní součet
  - kooperace: přenosná / nepřenosná výhra

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- množinu hráčů $N := \{1, \ldots, n\}$,
- množinu prostorů strategií – $S := \{X_1, \ldots, X_n\}$
- množinu výplatních funkcí $V := \{f_1, \ldots, f_n\}$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i :$ $\mapsto \mathbb{R}$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- množinu hráčů $N := \{1, \ldots, n\}$,
- množinu prostorů strategií – $S := \{X_1, \ldots, X_n\}$
- množinu výplatních funkcí $V := \{f_1, \ldots, f_n\}$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- množinu hráčů $N := \{1, \ldots, n\}$,
- množinu prostorů strategií – $S := \{X_1, \ldots, X_n\}$
- množinu výplatních funkcí $V := \{f_1, \ldots, f_n\}$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X := X_1 \times \cdots \times X_n$.

Množina $\{H, S, V\}$ je *hra v normálním tvaru*.

Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru

$N = \{1, 2\}$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- množinu hráčů $N := \{1, \dots, n\}$,
- množinu prostorů strategií – $S := \{X_1, \dots, X_n\}$
- množinu výplatních funkcí $V := \{f_1, \dots, f_n\}$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X := X_1 \times \cdots \times X_n$.

Množina $\{H, S, V\}$ je *hra v normálním tvaru*.

Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru

$N = \{1, 2\}$, $S = \{[0, 1], [0, 1]\}$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- množinu hráčů $N := \{1, \dots, n\}$,
- množinu prostorů strategií – $S := \{X_1, \dots, X_n\}$
- množinu výplatních funkcí $V := \{f_1, \dots, f_n\}$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X := X_1 \times \cdots \times X_n$.

Množina $\{H, S, V\}$ je *hra v normálním tvaru*.

Příklad – Hra 1 zapsaná v normálním tvaru

$N = \{1, 2\}$, $S = \{[0, 1], [0, 1]\}$,

$$V = \{f_1, f_2\}, f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)/2 & \text{pokud } x_1 \leq x_2, \\ 1 - (x_1 + x_2)/2 & \text{jinak}, \end{cases}$$

f_2 analogicky.

Hra v rozvinutém tvaru

- u hry v normálním tvaru se předpokládá, že rozhodnutí probíhají simultánně
- u hry v rozvinutém tvaru je rozhodování sekvenční (př. šachy, většina tahových her)
- obvyklou reprezentací je strom, kde každé větvení odpovídá jednomu rozhodnutí
- uzly – stavy, hrany – zvolené strategie

- pokud pozdější rozhodnutí nejsou ovlivňovány dřívejšími, lze řešit zpětnou indukcí
- lze převést na hru v normálním tvaru
- uzly mohou být samy o sobě hrou se simultánním rozhodováním

Hra ve tvaru charakteristické funkce

- pro kooperativní hry (s přenosnou výhrou)
- idea – zkoumat kooperaci formou hry normálním tvaru je výpočetně náročné, pojďme to usnadnit a říct, jaká bude výplata jednotlivých koalic

Hra ve tvaru charakteristické funkce je množina $\{N, \varphi : 2^N \mapsto \mathbb{R}\}$.

- N je množina hráčů, φ funkce, které každé podmnožině N přiřazuje výhru
- je možné klást otázky typu *Může koalice $K \subseteq N$ vzhledem k velikosti své výplaty vzniknout?* nebo *Jak se v rámci koalice K má rozdělit zisk, pokud tato koalice vznikne?*

Co považovat za *řešení*?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

Nashovo equilibrium

Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, že pro každého hráče, řekněme i-tého, platí, že pro všechna $x_i \in X_i$ je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ budeme značit (x_i, x_{-i}^*)

Best-response funkce

Podle definice Nashova ekvilibria je x^* ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna i platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i^* \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}^*).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat x_i^* v závislosti na x_{-i}. Definujme tzv. *best-response funkci* i-tého hráče, značenou g_i. Zřejmě $g_i : X_{-i} \mapsto 2^{X_i}$:

$$g_i(x_{-i}) := \{x_i \in X_i : f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_i)\}.$$

Zřejmě, x^* je Nashovo ekvlibrium, pokud $x_i^* \in g_i(x_{-i})$ pro všechna $i \in N$.

Hra 3: Piráti

- Situace:
  - n racionálních pirátů najde poklad sestávající z m mincí
  - dělení probíhá následovně:
    - od nejstaršího po nejmladšího postupně vznáší návrhy na rozdělení,
    - o každém návrhu se ihned hlasuje, pokud je některý přijat, další návrhy se nevznáší,
    - nutná nadpoloviční většina hlasů,
    - pokud návrh není přijat, navrhující pirát je eliminován.
- Preference (lexikograficky):
  - maximalizace vlastního zisku,
  - zachování vlastního života,
  - maximalizace uzmutých cizích životů, a
  - maximalizace spokojenosti starších pirátů (rozdělení 20,0,80,0,0 je lepší než 20,0,0,0,80).
- Cíl:
  - optimální návrhy a chování při hlasování pro $n = 5$ a $m = 100$.
  - řešení možno ověřit na `http://hry.polyedr.cz/pirati`

Hra 4: dvě třetiny průměru

- Situace:
  - každý hráč tipuje číslo z intervalu $[0, 100]$
  - vyhrává každý hráč, který je nejblíže 2/3 průměru všech tipovaných čísel
- Preference (lexikograficky):
  - být nejblíže 2/3 průměru,
  - minimalizovat počet výherců.
- Cíl:
  - co je optimální tip?
  - pojďme hru hrát na `http://hry.polyedr.cz/prumer`

Otázky k zamyšlení

1. Odvoďte předpis pro optimální dělení u hry Piráti (Hra 3) pro libovolné $n < 1000$ a $m = 1000$.
2. Již víme, že u hry 2/3 průměru (Hra 4) je optimální strategie $(0, \ldots, 0)$. Platí to však pro libovolný počet hráčů? Zaměřme se na malé a naopak na velké počty hráčů.
   Poznamenejme, že optimální strategií rozumíme takovou kombinaci strategií, že žádný z hráčů nemá motivaci svou strategii změnit.
3. Hru 2/3 průměru jsme hráli s tím, že jsme připoušteli, že tip hráčů může být reálné číslo z intervalu $[0, 100]$. Změní se něco, pokud se omezíme na celá čísla?