4EK421 – bonusové úkoly ze 4. a 5. týdne

Všechny úkoly mají termín odevzdání do 26. 10. 17:59. Způsob odevzdání je e-mailem na adresu `miroslav.rada@vse.cz`, do předmětu prosím uvádějte „4EK421 – bonus".

1 Ekvilibrium ve hře o dělitelné zakázky

V prezentaci o maticových hrách je zadána *hra o dělitelné zakázky* (na poslední straně). Hra je určená následujícími vstupními daty, na všechna nahlížejme jako na kladné konstanty:

- $\ell \in \mathbb{N}$ (počet zakázek),
- $a, b \in \mathbb{R}$ (objemy prostředků, kterými mohou hráči za získání zakázek lobovat) a
- $s = (s_1, \ldots, s_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ (velikosti jednotlivých zakázek).

V normálním tvaru se dá zapsat jako $(\{1,2\}, (X, Y), (f_1(x, y), f_2(x, y)))$, kde

- $X = \{(x_1, \ldots, x_\ell) : x_i > 0, \sum_{j=1}^{\ell} x_i = a\}$,
- $Y = \{(y_1, \ldots, y_\ell) : y_i > 0, \sum_{j=1}^{\ell} y_i = b\}$, a
- $f_1(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{s_j x_j}{x_j + y_j}$, $f_2(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{s_j y_j}{x_j + y_j}$.

Hra je zřejmě hrou s konstantním součtem, neboť

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{s_j(x_j + y_j)}{(x_j + y_j)} = \sum_{j=1}^{\ell} s_j.$$

Hodnotu $\sum_{j=1}^{\ell} s_j$ označme σ.

Na cvičení jsme experimentálně zjistili, že by Nashovým ekvilibriem hry mohla být dvojice strategií $(s\frac{a}{\sigma}, s\frac{b}{\sigma})$, tj. taková dvojice strategií, kdy hráči své disponibilní prostředky rozdělí v poměru určeném velikostmi jednotlivých zakázek. Úkolem je dokázat, že uvedená dvojice strategií skutečně Nashovým ekvlibriem je. Bylo by hezké dokázat i to, že jde o ekvilibrium jediné.

Úkol je hodnocen nejvýše 4 body.

2 Dělení výhry v kooperativní bimaticové hře

V prezentaci o bimaticových hrách jsou na slide 17 (strana 55 v pdf) navrženy následující dva způsoby *„vhodného"* dělení výhry koalice:

1) Vhodné je takové dělení (a_1, a_2), které splňuje $a_1 + a_2 = v(\{1, 2\})$ a $a_1 : a_2 = v(\{1\}) : v(\{2\})$.

2) Vhodné je takové dělení (a_1, a_2), které splňuje $a_1 + a_2 = v(\{1,2\})$ a $a_1 : a_2 = (v(\{1,2\}) - \cancel{v(\{1\})} v(\{2\})) : (v(\{1,2\}) - \cancel{v(\{2\})} v(\{1\}))$.

Předpokládejme, že $v(\{1,2\}) > v(\{1\}) + v(\{2\})$ a že žádný z výrazů $v(\{1\})$, $v(\{2\})$, $v(\{1,2\}) - v(\{2\})$, $v(\{1,2\}) - v(\{1\})$ není nulový.

Úkolem je ověřit, zda jsou dělení určená způsoby 1) a 2) prvkem jádra hry (viz slide 16 resp. stranu 54) pro všechny přípustné hodnoty $v(\{1,2\}), v(\{1\})$ a $v(\{2\})$, a pokud ne, co nejpřesněji popsat množinu těch hodnot, pro které ano.

Úkol je hodnocen nejvýše 2 body.

3 Otrávená čokoláda

Pravidla hry otrávená čokoláda lze najít zde.

Úkolem je ukázat, že, hraje-li se instance hry o počáteční velikosti $m \times n$, je počet různých stavů, do kterých se hra může dostat, alespoň $2^{\min\{m,n\}}$.

Úkol je hodnocen 2 body. V případě, že počet stavů uvedete spočítáte přesně (nebo alespoň výrazně přesněji než požaduji), hodnocení adekvátně zvýším.