4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Maticové hry a hry s konstantním součtem obecně

Miroslav Rada

Vysoká škola ekonomická v Praze

1. října 2019

Hra s konstantním součtem v normálním tvaru

Hra s konstantním součtem je hra v normálním tvaru $H = (N, S, V)$ zadaná

- seznamem hráčů $N := (1, \ldots, n)$,
- seznamem prostorů strategií – $S := (X_1, \ldots, X_n)$ a
- seznamem výplatních funkcí $V := (f_1, \ldots, f_n)$, kde
  - pro $i \in N$ je $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ a
  - $\sum_{i \in N} f_i = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Budeme se zabývat hledáním Nashových ekvilibrií pro tyto hry.

Převod na hru s nulovým součtem

Definujme $f_1'(x) = f_1(x) - k$.
Uvažujme hru $H' = (N, S, (f_1', f_2, \dots, f_n))$.

Tvrzení

Strategie $x^* \in X$ jsou NE hry H, právě když jsou NE hry H'.

Ke $x^* \in X, i \in N, \xi \in X_i$ definujme strategii $x(i, \xi) := (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \xi, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$.
Jakákoli strategie $x^* \in X$ splňující $f_i(x^*) \geq f_i(x(i, \xi))$ pro $i \in N$ splňuje i $f_1'(x^*) \geq f_1'(x(1, \xi))$, neboť posledně jmenovaná nerovnost lze přičtením k převést na dříve jmenovanou. Opak analogicky.

Důsledek

Při hledání Nashova ekvilibria (NE) lze BÚNO předpokládat, že $k = 0$:

O hrách H a H' hovoříme jako o *strategicky ekvivalentních*.

Dva hráči a konstantní součet – antagonistická hra

- Hra s konstantním součtem s $n = 2$ se nazývá *antagonistická hra*. Situaci usnadňuje absolutní protichůdnost zájmů hráčů: pokud $k = 0$, pak to, co jeden vyhraje, druhý ztratí.
- Lze tedy psát $H = ((1, 2), (X_1, X_2), (f_1, -f_1))$.
- Definiční nerovnosti Nashovy rovnováhy se pak zapíšou jako

$$f_1(x_1^*, x_2^*) \geq f_1(x_1, x_2^*),$$
$$-f_1(x_1^*, x_2^*) \geq -f_1(x_1^*, x_2)) \Leftrightarrow f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2),$$

nebo také

$$f_1(x_1, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1^*, x_2) \qquad \text{pro všechna } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

Konečná antagonistická hra – maticová hra

- Antagonistická hra, ve které mají oba hráči konečný počet strategií, se nazývá *maticová hra*. Jde o to, že výplatní funkce v takové hře se dá sledovat v matici, a taková matice pak hru plně popisuje:

$$H = ((1,2), (\{1,\ldots,m_1\}, \{1,\ldots,m_2\}), (f_1(i,j) = a_{ij}, f_2 = -f_1)),$$

- kde $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$. Předpokládáme tak, že strategie hráče 1 resp. 2 odpovídají řádkům resp. sloupcům matice A.
- Zřejmě, každá matice popisuje maticovou hru.
- Dvojice (k,l) je NE (*v ryzích strategiích*) v maticové hře, pokud pro všechna $i \in X_1$ a $j \in X_2$ platí $a_{il} \leq a_{kl} \leq a_{kj}$.
- Prvek a_{kl} matice A se nazývá *sedlový bod*; je to největší prvek ve sloupci l a nejmenší prvek v řádku k.
- Problém: sedlový bod nemusí existovat.

Hledaní NE v ryzích strategiích

Idea: najít zvlášť taková (k, l), že $a_{il} \leq a_{kl}$ a zvlášť (k, l) vyhovující $a_{kl} \leq a_{kj}$, tj. najít takové dvojice strategií, u kterých by si nemohl při odchýlení polepšit hráč 1 resp. 2.

1. Pro každou strategii l hráče 2 najdeme množinu $K_l = \arg\max_{k \in X_1} a_{kl}$ strategií hráče 1, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii l hráče 2. Snadno získáme množinu K dvojic strategií $(k, l), k \in K_l, l \in X_2$, splňující $a_{il} \leq a_{kl}$ pro všechna $i \in X_1$.
2. Pro každou strategii k hráče 1 najdeme množinu $L_k = \arg\min_{l \in X_2} a_{kl}$ strategií hráče 2, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii k hráče 1. Snadno získáme množinu L dvojic strategií $(k, l), l \in L_k, k \in X_1$, splňující $a_{kj} \geq a_{kl}$ pro všechna $j \in X_2$.
3. Množina všech NE je množina všech (k, l) takových, že jsou zároveň v K i v L.

Příklady

$$K_1 = \{1, 2\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & 2 \\ \overline{3} & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & \color{red}{4} & 2 \\ \overline{3} & \color{red}{2} & 1 \\ 0 & \color{red}{\overline{6}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$
$$K_2 = \{3\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \color{red}{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \color{red}{1} \\ 0 & \overline{6} & \color{red}{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= \{1,2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1,1),(2,1),(3,2),(1,3)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{\color{red}{3}} & \color{red}{4} & \underline{\overline{\color{red}{2}}} \\ \overline{3} & 2 & 1 \\ 0 & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1, 2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1,1), (2,1), (3,2), (1,3)\} \\ L_1 &= \{3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ 0 & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,2\} \\ K_2 &= \{3\} \\ K_3 &= \{1\} \\ K &= \{(1,1),(2,1),(3,2),(1,3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$
\begin{pmatrix}
\overline{3} & 4 & \overline{\underline{2}} \\
\overline{3} & 2 & \underline{1} \\
\color{red}{\underline{0}} & \color{red}{\overline{6}} & \color{red}{1}
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \{1, 2\} \\
K_2 &= \{3\} \\
K_3 &= \{1\} \\
K &= \{(1,1), (2,1), (3,2), (1,3)\} \\
L_1 &= \{3\} \\
L_2 &= \{3\} \\
L_3 &= \{1\} \\
L &= \{(1,3), (2,3), (3,1)\}
\end{aligned}
$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{\color{red}{2}}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$
$$K_2 = \{3\}$$
$$K_3 = \{1\}$$
$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$
$$L_1 = \{3\}$$
$$L_2 = \{3\}$$
$$L_3 = \{1\}$$
$$L = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$
$$K \cap L = \{(1, 3)\}$$

Příklady

$$K_1 = \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ \overline{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & 2 \\ \overline{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2,1),(1,2),(2,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \color{red}{2} \\ \overline{4} & 0 & \color{red}{\overline{5}} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \overline{\underline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} {\color{red}3} & {\color{red}\overline{4}} & {\color{red}\underline{2}} \\ \overline{4} & 0 & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2,1),(1,2),(2,3)\} \\ L_1 &= \{3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{\color{red}4} & \underline{\color{red}0} & \overline{\color{red}5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2,1),(1,2),(2,3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{2\} \\ L &= \{(1,3),(2,2)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \underline{\overline{5}} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{2\}$$
$$K_2 = \{1\}$$
$$K_3 = \{2\}$$
$$K = \{(2,1),(1,2),(2,3)\}$$
$$L_1 = \{3\}$$
$$L_2 = \{2\}$$
$$L = \{(1,3),(2,2)\}$$
$$K \cap L = \emptyset$$

Příklady

$$K_1 = \{1, 3\}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\overline{4}} & 5 & 4 \\ \color{red}{3} & 7 & 3 \\ \color{red}{\overline{4}} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= \{1,3\} \\ K_2 &= \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{4} & 5 & 4 \\ 3 & \overline{7} & 3 \\ \overline{4} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} K_1 &= \{1,3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1,3\} \\ K &= \{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{4} & 5 & \overline{4} \\ 3 & \overline{7} & 3 \\ \overline{4} & 5 & \overline{4} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \color{red}{\underline{\overline{4}}} & \color{red}{5} & \color{red}{\underline{\overline{4}}} \\ 3 & \overline{7} & 3 \\ \overline{4} & 5 & \overline{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1,3\} \\ K &= \{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\} \\ L_1 &= \{1,3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \overline{\underline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\underline{4}} & 5 & \overline{\underline{4}} \\ \color{red}{\underline{3}} & \color{red}{\overline{7}} & \color{red}{\underline{3}} \\ \overline{\underline{4}} & 5 & \overline{\underline{4}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1,3\} \\ K &= \{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\} \\ L_1 &= \{1,3\} \\ L_2 &= \{1,3\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \overline{\underline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\underline{4}} & 5 & \overline{\underline{4}} \\ \underline{3} & \overline{7} & \underline{3} \\ \color{red}{\overline{\underline{4}}} & \color{red}{5} & \color{red}{\overline{\underline{4}}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{1,3\} \\ K_2 &= \{2\} \\ K_3 &= \{1,3\} \\ K &= \{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\} \\ L_1 &= \{1,3\} \\ L_2 &= \{1,3\} \\ L_3 &= \{1,3\} \\ L &= \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\} \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\overline{4}} & 5 & \underline{\overline{4}} \\ \underline{3} & \overline{7} & \underline{3} \\ \underline{\overline{4}} & 5 & \underline{\overline{4}} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1,3\}$$
$$K_2 = \{2\}$$
$$K_3 = \{1,3\}$$
$$K = \{(1,1),(3,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$$
$$L_1 = \{1,3\}$$
$$L_2 = \{1,3\}$$
$$L_3 = \{1,3\}$$
$$L = \{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3)\}$$
$$K \cap L = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$$

Smíšené strategie

Uvažujme konečnou hru v normálním tvaru $H = (N, (X_1, \ldots, X_n), (f_1, \ldots, f_n))$.
Koncept NE v ryzích strategiích je slabý – existují hry, pro které NE neexistují.
Připusťme, že se hráči mohou své strategie vybírat náhodně podle zvoleného pravděpodobnostního rozdělení, jejich výplatní funkce pak budou očekávané hodnoty výplat, tedy

- prostor strategií i-tého hráče pak má podobu $X_i^s = \{(x_i^1, \ldots, x_i^{m_i})^\mathsf{T} : \sum_{j \in X_i} x_i^j = 1, x_i \geq 0\}$, a
- výplatní funkce i-tého hráče je

$$f_i^s = \sum_{k_1 \in X_1} \cdots \sum_{k_n \in X_n} f_i(x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}) \prod_{j \in N} x_j^{k_j}$$

Smíšené rozšíření konečné hry

Definice

Smíšené rozšíření konečné hry
$H = (N, (X_1, \ldots, X_n), (f_1, \ldots, f_n))$ je hra
$H^s = (N, (X_1^s, \ldots, X_n^s), (f_1^s, \ldots, f_n^s))$.

Věta

Každá konečná hra má NE ve svém smíšeném rozšíření.

Smíšené rozšíření maticové hry

Pro maticovou hru lze výplatní funkce smíšeného rozšíření zapsat jednodušeji:

$$f_i^s = \sum_{j \in X_1} \sum_{k \in X_2} x_1^j x_2^k a_{jk} = x_1^{Ts} A x_2^s$$

Jde o to, že kombinace strategií (j, k) bude vybrána s pravděpodobností $p = x_1^j x_2^k$.

NE ve smíšeném rozšíření maticové hry

- Řekněmě, že (x_1^{*s}, x_2^{*s}) jsou NE. Označme $v = f_1(x_1^{*s}, x_2^{*s})$.
- Hráč 2 se snaží chovat tak, aby v bylo minimální, pojďme najít x_2^{*s} tak, aby, ať hráč 1 udělá cokoli, ztratil hráč 2 vždy nejvýše v.
- Nelineární program níže vlevo zřejmě hledá požadované strategie x_2^s a minimální možné v. Linearizace viz vpravo.
- Z m_1 nerovností ve tvaru $Ax_2^s \leq v$ lze konvexní kombinací vytvořit nerovnost ve tvaru ${x_1^s}^\mathsf{T} A x_2^s \leq v$, pro všechny $x_1^s \in X_1^s$, tedy i tu nerovnost, jejíž levá strana je maximální.

$$\begin{aligned} \min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} \; & v \\ \max_{x_1^s \in X_1^s} {x_1^s}^\mathsf{T} A x_2^s &\leq v \\ x_2^s &\geq 0 \\ 1^\mathsf{T} x_2^s &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} \; & v \\ A x_2^s &\leq v \\ x_2^s &\geq 0 \\ 1^\mathsf{T} x_2^s &= 1 \end{aligned}$$

„Lepší“ linearizace

Podobný lineární program lze sestavit i pro výpočet x_1^*. Tedy

$$\min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}} v \qquad \max_{x_1^s \in \mathbb{R}^{m_1}} v$$

$$A x_2^s \leq v \qquad A^\mathsf{T} x_1^s \geq v$$

$$x_2^s \geq 0 \qquad x_1^s \geq 0$$

$$1^\mathsf{T} x_2^s = 1 \qquad 1^\mathsf{T} x_1^s = 1$$

Je-li zaručeno, že $v > 0$ (viz převody na nulový součet), lze zavést substituci $p = x_1^s / v$ a $q = x_2^s / v$. Po pár úpravách pak:

$$\max_{q \in \mathbb{R}^{m_2}} 1^\mathsf{T} q \qquad \min_{p \in \mathbb{R}^{m_1}} 1^\mathsf{T} p$$

$$A q \leq 1 \qquad A^\mathsf{T} p \geq 1$$

$$q \geq 0 \qquad p \geq 0$$

Tyto programy jsou zřejmě duální, při použití vhodného algoritmu stačí řešit jeden z nich (řešení druhého: stínové ceny).

Příklad

Maticová hra pro dva hráče je dána následující maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Rozhodněte, zda má tato hra sedlový bod.
- Najděte optimální strategie pro oba hráče.

Metoda fiktivní hry

- iterační metoda pro odhad NE v konečných hrách
- výhoda: jednoduchost
- nevýhoda: nemusí konvergovat
- myšlenka:
  - předpokládá se, že se hra donekonečna opakuje
  - každý hráč, řekněmě hráč i, předpokládá, že hraje proti hráčům, kteří hrají stále stejné (smíšené) strategie
  - v j-tém opakování hry se tyto smíšené strategie odhadují napozorovanými relativními četnostmi jednotlivých ryzích strategií v předchozích $j-1$ hrách
  - strategie hráče i v j-tém opakování hry je optimální reakce na odhadované smíšené strategie.
- konvergence pro:
  - konečné antagonistické hry
  - hry řešitelné vyškrtáním dominovaných strategií
  - aj.

Hra o dělitelné zakázky

- Situace:
  - 2 hráči soupeří o l zakázek velikosti $s_1, \ldots, s_l$.
  - Soupeření má formu lobbingu: hráč 1 má k dispozici a prostředků na lobbing, hráč 2 disponuje prostředky o velikosti b.
  - Hráči své disponibilní prostředky beze zbytku rozdělí mezi jednotivé zakázky; každý hráč přidělí každé zakázce alespoň nějaké prostředky.
  - Pokud hráč 1 lobuje pro zakázku 1 a_1 prostředky a hráč 2 b_1 prostředky, získá hráč 1 část zakázky 1 o velikosti $s_1 a_1/(a_1 + b_1)$.
- Výplatní funkce a prostory strategií formálně:
  $X_1 = \{(a_1, \ldots, a_l) : a_i > 0, \sum_{j=1}^{l} a_i = a\}$,
  $X_2 = \{(b_1, \ldots, b_l) : b_i > 0, \sum_{j=1}^{l} b_i = b\}$,
  $f_1 = \sum_{j=1}^{l} \frac{s_j a_j}{a_j + b_j}$, $f_2 = \sum_{j=1}^{l} \frac{s_j b_j}{a_j + b_j}$.
- Cíl:
  - Jaká je optimální strategie?