

4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hry v rozvinutém tvaru

MIROSLAV RADA

Vysoká škola ekonomická v Praze

15. října 2019

Hra v rozvinutém tvaru – příběh

- Mějme hru s řadou po sobě jdoucích rozhodnutí.
- Hra se v každém okamžiku nachází v nějakém *stavu*. Stav je určen počátečním modelem hry a předcházejícími rozhodnutími. Poté, co je přijato nějaké rozhodnutí, se stav hry může změnit. Stavby jsou *rozhodovací* nebo *pravděpodobnostní*.
- V každém rozhodovacím stavu se rozhoduje právě jeden hráč, který vybírá některý ze početně mnoha dalších stavů.
- Příklad: šachy, jiné hry apod.
- Pravděpodobnosti přechodů v pravděpodobnostních stavech jsou předem určené.

Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *BoS* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1, 2 & 0, 0 \\ 0, 0 & 2, 1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Modifikace:

Řekněme, že jeden z manželů odchází z práce dřív a koupí lístky dle vlastního výběru. Druhý se buď přidá, nebo si koupí vlastní lístek na druhý koncert.

- Jak se mají hráči chovat, pokud se bude rozhodovat dříve řádkový hráč?
- A co v případě sloupcového hráče?

Piškvorcky 3×3

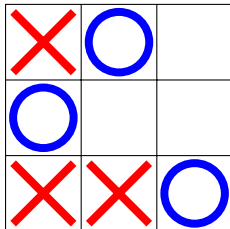
- Mějme piškvorcky v mřížce 3×3 . Velikost políčka je $1\text{cm} \times 1\text{cm}$.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka (velikost značky libovolná).
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Piškvorcky 3×3

- Mějme piškvorcky v mřížce 3×3 . Velikost políčka je $1\text{cm} \times 1\text{cm}$.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka.
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Otázky:

- Odvoďme nějakou horní mez počtu stavů, do kterých se hra může dostat.
- Sestavme graf podhry, nacházející se ve stavu níže (modrý na tahu).



Jaké otázky si klást?

- Jaké otázky si klást?
- Jak hra dopadne?
 - Jaké budou výplaty hráčů?
 - Jakými strategiemi se výplat dosáhne?
- Co je zde vlastně strategie?
- Jak by hra dopadla, pokud by byla v jiném stavu než počátečním?
 - Dokonalá rovnováha podhry!
- Jak těžké je spočítat odpovědi na předchozí otázky?
 - Jak velký je explicitní popis hry?
- Je-li zadán stav, jakou posloupností stavů se do něj hra dostala?
 - Retrográdní analýza!

Model hry v rozvinutém tvaru

Za model hry H v rozvinutém tvaru vezměme množinu

$H = (N, G = (S, R), f, v, p)$, kde

- $N = \{1, \dots, n, 0\}$ je množina hráčů, 0 je fiktivní hráč (hraje smíšené strategie v pravděpodobnostních stavech),
- G je orientovaný graf popisující možná rozhodnutí v dané hře, určený
 - množinou S jednotlivých stavů, ve kterých se hra může nacházet,
 - množinou $R \subseteq S \times S$ možných rozhodnutí; pokud $(s_1, s_2) \in R$, znamená to, že zahráním některé strategie se lze přesunout do stavu s_2 .
- $f : S \mapsto \mathbb{R}^n$ je zobrazení přiřazující jednotlivým stavům výplaty jednotlivých hráčů; ty jsou vypláceny okamžitě ve chvíli, kdy hra do daného stavu vstoupí,
- $v : S \mapsto N$ je zobrazení přiřazující jednotlivým stavům hráče, který se v daném stavu rozhoduje,
- p je zobrazení přiřazující každému pravděpodobnostnímu stavu s (tj. $s \in \{s \in S : v(s) = 0\}$) rozdělení pravděpodobností nad jednotlivými hranami vycházejícími z s (tj. hranami $\{(s, t) \in R : t \in S\}$).

Model hry v rozvinutém tvaru – poznámky a způsob řešení

- Typicky jsou nenulové f jen ve stavech, ze kterých už nevedou žádné hrany (dá se transformovat, viz také níže), říkejme jim *listy*.
- Graf G je typicky strom (tj. souvislý acyklický).
- Graf G může být složitý, ale dá se zestromovatět (na nekonečnou výšku nebo šířku).
- Informace, co přesně znamenají jednotlivá rozhodnutí, v modelu obecně být nemusí. Pokud dvě různá rozhodnutí vedou do stejného stavu, model to nemusí rozlišovat.

Způsob řešení u acyklického G :

- Každému stavu pro každého hráče přiřadit celkovou výplatu, kterou hráč získá, pokud se hra do daného stavu dostane. Označme takové přiřazení $g : S \mapsto \mathbb{R}^n$.
- Odspodu: v listech jsou výplaty jasné. Vedou-li z nějakého stavu hrany jen do už vyhodnocených uzlů, lze vybrat nejlepší rozhodnutí pro hráče, který se právě rozhoduje. Tedy, vybírá-li se strategie ve stavu s , je $g(s) = g(\arg \max_{u:(s,u) \in R} g(u)_{v(s)})$

Otrávená čokoláda

Situace:

- je dána čtvercová tabulka čokolády o rozměru $m \times n$, $\max\{m, n\} > 1$
- dílek na pozici $(1, 1)$ je otrávený
- hráči čokoládu postupně ujidají
- kdo sní otrávený dílek, prohrál
- hráč, který je na tahu, vybere nesněděný dílek (i, j) a sní vše, co ještě není snědené, v obdélníku (i, j) , (i, n) , (n, j) , (n, n)

Hru je možné hrát na <http://hry.polyedr.cz/chocolate>.

Úkoly.

- Uvažujme hru s $m = n > 1$. Popišme vyhrávající strategii pro hráče, který začíná.
- Dokažme, že (v obecném případě) existuje vyhrávající strategie pro hráče, který začíná.
- Ukažme, že počet stavů, do kterých se hra může dostat, je exponenciálně velký v $\Omega(\min\{m, n\})$ (tj. že vyhrávající strategii není únosné hledat hrubou silou; $\Omega(x)$ znamená funkci větší než nějaká lineární funkce x).

Příklad – pistolníci

Situace:

- Tři pistolníci jsou v souboji.
- Pokud jsou na řadě se střelbou, trefí se s pravděpodobnostmi $p_1 = 1/3, p_2 = 1/2, p_3 = 1$.
- Mohou střílet buď na soupeře podle vlastního výběru, nebo do vzduchu ($p = 1$).
- Pokud je některý pistolník zasažen, dál se neúčastní.
- První střílí 1, pak 2, účastní-li se ještě, pak 3 účastní-li se ještě, pak 1, účastní-li se ještě, atd.

Cíl: maximalizovat pravděpodobnost, že v souboji zůstane jako poslední.

Otázka: na koho má střílet první pistolník?

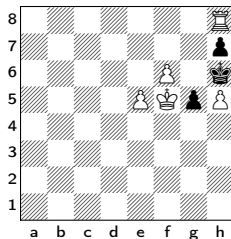
Zjednodušující předpoklady:

- pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3,
- pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2,
- pokud jsou naživu již jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.

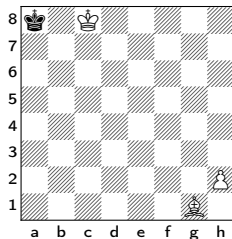
Retrográdní analýza – příklady

Pozice níže byly dosaženy posloupnostmi přípustných tahů. Bílý je vždy na tahu. Vyřešte jednotlivé úlohy!

Mat druhým tahem.



Jaký byl poslední tah bílého?



Určete, zda bílý smí rošovat.

