4EK421 – cvičení – oligopoly

1 Zadání

1.1 Cournotův oligopol s kapacitami

Mějme hru v normálním tvaru $((1, 2, 3), ([0, k_1], [0, k_2], [0, k_3]), (f_1, f_2, f_3))$, kde

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i c(x_1, x_2, x_3) - (n_i + v_i x_i)$$

pro $i = 1, 2, 3$ a $c(x_1, x_2, x_3) = 6 - 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$. Hodnoty parametrů k, v, n pro jednotlivé hráče udává následující tabulka:

i	n_i	v_i	k_i
1	3	0.5	6
2	2	0.75	3
3	1	2.5	2

Předpokládejme, že hráči nespolupracují. Nalezněme Nashovo ekvilibrium (NE).

Interpretace zadání. Hru lze interpretovat následovně: hráči jsou oligopolisté, kteří vyrábějí jistou komoditu. Hráč i má kapacitu výroby k_i, fixní náklady n_i a variabilní náklady v_i. Funkce f_i je jeho zisková funkce, skládající se z příjmů z prodeje a nákladů spojených s výrobou. Funkce c je cena, která se na trhu v závislosti na celkovém vyrobeném množství ustanoví.

1.2 Stackelbergův oligopol

Uvažujme hru z předcházející sekce. Uvažujme, že se hráči o svém výrobním množství nyní nerozhodují v ten samý moment, ale v různé momenty. Později se rozhodující hráči již znají výrobní množství dříve se rozhodujícícíh. Rozeberme tři případy lišící se tím, v jakém pořadí se hráči rozhodují:

1. Jako první se rozhoduje hráč 3, po něm hráč 2. Hráč 1 se hry neúčastní (tj. jeho výrobní množství bude 0). (Optikou Stackelbergova oligopolu: hráč 3 je vůdce, hráč 2 je následník.)

2. Jako první se rozhoduje hráč 3, po něm současně hráči 1 a 2. (Hráč 3 je vůdce z pohledu hráčů 1 a 2.)

3. Jak první se rozhoduje hráč 3, po něm hráč 2, nakonec hráč 1. (Hráč 3 je vůdce z pohledu obou hráčů, hráč 2 je následník hráče 3 a vůdce pro hráče 1, hráč 1 je následník hráčů 2 a 3.)

Případy 2 a 3 jsou technicky o něco pracnější. Pro jednoduchost je řešme s prostory strategií $\mathbb{R}$ místo $[0, k_i]$, tzn. výrobní množství jednotlivých oligopolistů nebudou nijak omezena. Kapacitu užijme pouze v případě 1.

1.3 Srovnání cen

Zamysleme se nad tím, k jakým cenám na trhu vedou jednotlivá uspořádání (tj. jaká bude cenová funkce při optimálním chování hráčů). Co je pro spotřebitele nejvýhodnější?

2 Postup

2.1 Cournotův oligopol

Idea hledání NE. Nashovo ekvilibrium je trojice výrobních množství, se kterou budou všichni hráči spokojeni. Značme ekvilibrium (x_1^*, x_2^*, x_3^*). Formálně, pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$ musí pro každé $x_i \in [0, k_i]$ platit, že

$$f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*) \geq f_i(x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_3^*).$$

Pro konkrétní i příslušná nerovnost říká, že i-tý hráč nemůže dosáhnout lepší výplaty, pokud zahraje jiné množství než x_i^*. Jednotlivé hodnoty $f_i(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ musí být maximální v následujícím smyslu:

$$\begin{aligned}
\max_{x_1 \in [0, k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) &= f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*), \\
\max_{x_2 \in [0, k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*) &= f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*), \\
\max_{x_3 \in [0, k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3) &= f_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*).
\end{aligned}$$

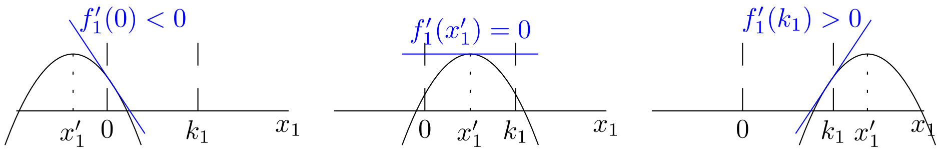
Každá z rovností, řekněme i-tá, tedy předepisuje hodnotu maxima funkce jedné proměnné x_i^* na prostoru strategií i-tého hráče. Vyhovující (x_1^*, x_2^*, x_3^*) lze proto získat řešením soustavy (1), což je vlastně analogie definici ekvilibria pomocí best-response funkcí.

$$\begin{aligned}
x_1^* &\overset{(\dagger)}{=} \arg\max_{x_1 \in [0, k_1]} f_1(x_1, x_2^*, x_3^*) = g_1(x_2^*, x_3^*), \\
x_2^* &= \arg\max_{x_2 \in [0, k_2]} f_2(x_1^*, x_2, x_3^*) = g_2(x_1^*, x_3^*), \\
x_3^* &= \arg\max_{x_3 \in [0, k_3]} f_3(x_1^*, x_2^*, x_3) = g_3(x_1^*, x_2^*),
\end{aligned} \tag{1}$$

Poznamenejme, že použití první rovnosti (označená symbolem (†)) je nekorektní: arg max i best-response funkce vrací množinu. Správné by bylo použít relaci $\in$. Protože ale v našem případě budou tyto množiny vždy jednoprvkové, budeme s nimi pro jednoduchost v tomto textu zacházet jako s prvkem.

Vlastnosti funkcí f_i ve vztahu k řešení soustavy (1). Soustavu ve tvaru (1) by při zcela obecných výplatních funkcích f_1, f_2, f_3 mohlo být těžké vyřešit. V našem případě jsou ale výplatní funkce kvadratické a ryze konkávní ve vlastních strategiích (tj. f_i je konkávní v x_i). Konkávnost f_i lze snadno ověřit výpočtem druhé derivace podle x_i. Ověření necháme jako cvičení.

Konkávní kvadratická funkce jedné proměnné má v $\mathbb{R}$ právě jedno maximum, a to pro takové x_0, pro které je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = 0$. Problém je, že strategie i-tého hráče je omezená na interval $[0, k_i]$, takže nestačí jednoduše řešit soustavu tří rovnic o třech neznámých, kde rovnice říkají, že derivace jednotlivých hráčů musí být nulové. Naštěstí lze využít ryzí konkávnosti. Zaveďme pro jednoduchost značení $f_i' := \frac{\partial f_i(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}$, tj. f_i' je hodnota derivace f_i podle x_i. Dále $f_i'(x_i)$ bude hodnota derivace v nějakém konkrétním bodě x_i. Představme si následující grafy, například pro hráče 1:



Zjevně, platí-li pro hráče 1, že $f_1'(0) < 0$, je optimální vyrábět 0. Naopak, platí-li pro něj, že $f_1'(k_1) > 0$, zřejmě je optimální vyrábět k_1. Tedy, best-response funkci můžeme pro hráče 1 vlastně zavést takto:

$$g_1(x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } f_1'(0) < 0, \\ k_1 & \text{pokud } f_1'(k_1) > 0, \\ x_1' & \text{tak, že } f_1'(x_1') = 0 \text{ v ostatních případech.} \end{cases}$$

Pro hráče 2 a 3 se best-response funkce zkonstruuje analogicky.

Protože příslušné parciální derivace jsou lineární funkce, lze úlohu řešit dvoufázově: nejprve bez omezení na intervaly $[0, k_i]$, což dá počáteční nástřel, ze kterého lze postupným přizpůsobováním dojít k takové trojici (x_1^*, x_2^*, x_3^*), že jednotlivá výrobní množství budou vyhovovat best-response funkci.

2.2 Stackelbergův oligopol

Případ 1: hráč 3 vůdce, hráč 2 následník. Situace je vlastně konceptuálně velmi podobná. Vůdce vybere strategii, následník na ní zareaguje podle své best-response funkce.

Vůdce ví, že následník bude takto reagovat, a při výběru strategie s tím počítá. Z pohledu vůdce se pak vlastně jedná o optimalizaci funkce jedné proměnné, protože výrobní množství následníka je jednoznačně popsané a závislé právě na této jedné proměnné – výrobním množství vůdce. Výplatní funkce vůdce proto v této hře je: $f_3(x_3) = x_3 c(g_2(x_3), x_3) - n_3 - v_3 x_3$, kde $g_2(x_3)$ je best-response funkce spočtená pro Cournotův oligopol (s tím, že $x_1 = 0$). Optimální strategie se při této výplatní funkci najde stejně jako v předchozím případě Cournotova oligopolu.

Chování hráče 2 se snadno dopočítá pomocí best-response funkce.

Případ 2: hráč 3 vůdce, hráči 1 a 2 následníci. Od předchozího případu se liší v tom, že následníci jsou 2. Příklad, kdy více hráčů najednou volí své strategie, už známe – to je Cournotův oligopol. Tedy, najdeme ekvilibrium $(x_1^*(x_3), x_2^*(x_3))$ v Cournotově oligopolu pro hráče 1 a 2 v závislosti na x_3 (tzn. budeme řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých s parametrem x_3). Toto ekvilibrium se dosadí do výplatní funkce vůdce, která nyní bude $f_3(x_3) = x_3 c(x_1^*(x_3), x_2^*(x_3), x_3) - n_3 - v_3 x_3$.

Případ 3: hráč 3 vůdce, hráč 2 následník pro 3 a vůdce pro 1, hráč 1 následník pro oba. Hráč 1 bude hrát best-response $g_1(x_2, x_3)$. Hráč 2 toto ví. Zároveň již zná chování x_3 hráče 3. Tj. hráč 2 hledá optimální strategii x_2 pro svou výplatní funkci $f_2(x_2, x_3) = x_2 c(g_1(x_2, x_3), x_2, x_3) - n_2 - v_2 x_2$. Označme tuto strategii $x_2^*(x_3)$.

Hráč 3 pak optimalizuje svou výplatní funkci

$$f_3(x_3) = x_3 c(g_1(x_2^*(x_3), x_3), x_2^*(x_3), x_3) - n_3 - v_3 x_3.$$

3 Konkrétní řešení

3.1 Cournotův oligopol

Výplatní funkce i-tého hráče je:

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = x_i(6 - 0.5(x_1 + x_2 + x_3)) - n_i - v_i x_i = -0.5x_i^2 + (6 - v_i - 0.5 \sum_{j \neq i} x_j) x_i - n_i.$$

Připomeňme značení, že f_i' je parciální derivace f_i podle x_i. Máme proto:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} f_1' &=& -1x_1 &-& 0.5x_2 &-& 0.5x_3 &+& 5.5 \\ f_2' &=& -0.5x_1 &-& 1x_2 &-& 0.5x_3 &+& 5.25 \\ f_3' &=& -0.5x_1 &-& 0.5x_2 &-& 1x_3 &+& 3.5 \end{array}$$

a best-response funkce jsou:

$$g_1(x_2, x_3) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 5.5 - 0.5(x_2 + x_3) < 0, \\ 6 & \text{pokud } -0.5 - 0.5(x_2 + x_3) > 0, \\ 5.5 - 0.5(x_2 + x_3) & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$g_2(x_1,x_3) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 5.25 - 0.5(x_1+x_3) < 0, \\ 3 & \text{pokud } 2.25 - 0.5(x_1+x_3) > 0, \\ 5.25 - 0.5(x_1+x_3) & \text{jinak a} \end{cases}$$

$$g_3(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 3.5 - 0.5(x_1+x_2) < 0, \\ 2 & \text{pokud } 1.5 - 0.5(x_1+x_2) > 0, \\ 3.5 - 0.5(x_1+x_2) & \text{jinak.} \end{cases}$$

Best-response funkce jsou díky 3 případům, které je nutné rozlišovat, ošklivě složité. Pojďme nejprve zjistit, zda vůbec nastavování $x_i = k_i$ nebo $x_i = 0$ bude nutné použít. Vyřešme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.25 \\ 3.5 \end{pmatrix},$$

to lze snadno udělat pomocí vztahu

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.25 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.5 \\ 5.25 \\ 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.875 \\ 3.375 \\ -0.125 \end{pmatrix}.$$

V excelu lze pro maticovou inverzi též využít příslušnou funkci. Spočtená výrobní množství jsou ekvilibriem, neuvažujeme-li výrobní kapacity. Cena, která by se na trhu utvořila by byla $6 - 0.5(7.125) = 2.4375$.

Zřejmě, spočtená množství $(3.875, 3.375, -0.125)$ podmínkám omezených výrobních množství nevyhovují, máme totiž $x_2 > k_2$ a $x_3 < 0$. Best-response funkce (s kapacitami) jsou $(3.875, 3, 0)$. Položme (x_1, x_2, x_3) rovné tomuto vektoru a opět spočítejme best-reponse. Dostaneme $(4, 3, 0.0625)$. Opakováním dostáváme postupně best-reponse $(3.96875, 3, 0)$, $(4, 3, 0.00390625)$, $(3.9921875, 3, 0)$ atd. Zřejmě strategie konvergují k vektoru výrobních množství $(4, 3, 0)$. Snadno ověříme, že tato výrobní množství jsou sama sobě best-reponse. Jde tedy o ekvilibrium. Ostatně, toho, že na strategii $x_3 = 0$ má hráč 1 odpovědět $x_1 = 4$ a obráceně, si lze všimnout již po dvou iteracích.

Pokud bychom nechtěli iterovat vůbec, šlo by ekvilibrium najít přímo, a to například kvadratickým programem, který jednotlivé případy best-reponse funkci šikovně zakóduje pomocí pomocných proměnných.

Lze si všimnout, že:

- $f_3'(x_1, x_2, x_3) = 0$. Tj. přestože hráč 3 vyrábí na spodní hranici svých možností, nechtěl by výrobní množství snižovat, ani kdyby mohl.

- $c(x_1, x_2, x_3) = 2.5$.

3.2 Stackelbergův oligopol

Hráč 3 vůdce, hráč 2 následník Best-response funkce následníka je

$$g_2(x_3) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 5.25 - 0.5x_3 < 0, \\ 3 & \text{pokud } 2.25 - 0.5x_3 > 0, \\ 5.25 - 0.5x_3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zkusme nejprve problém uvažovat bez kapacit. Do výplatní funkce vůdce z best-response funkce dosadíme jen třetí řádek. Ukáže-li se pak, že je optimální strategie x_3 vůdce v intervalu $[4.5, 10.5]$, použije se z best-response právě tento řádek a první dva řádky nebude třeba vůbec brát v úvahu. (Již na první pohled je ovšem vidět, že s kapacitami je maximální výroba vůdce 2. Tzn. následník bude v modelu s kapacitami vždy vyrábět 3 podle druhého řádku best-response funkce).

Výplata vůdce v modelu bez kapacit je

$$f_3(x_3) = x_3(6 - 0.5(5.25 - 0.5x_3 + x_3) - 1 - 2.5x_3 = 0.875x_3 - 0.25x_3^2 - 1.$$

Pak $f_3' = -0.5x_3 + 0.875x_3$. Zřejme, $f_3'(x_3) = 0$ pro $x_3 = 1.75$. Pak $x_2 = 5.25 - 0.5 \cdot 1.75 = 4.375$. Cena na trhu je $6 - 0.5(4.375 + 1.75) = 2.9375$.

Pro strategii vůdce v modelu s kapacitami bychom měli maximalizovat $f_3(x_3)$, kde se x_2 dosadí best-response $g_2(x_3)$. Protože ale hráč 2 nezávisle na x_3 zahraje $x_2 = 3$, stačí nyní použít best-response funkci hráče 3.

$$g_3(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } 3.5 - 0.5x_2 < 0, \\ 2 & \text{pokud } 1.5 - 0.5x_2 > 0, \\ 3.5 - 0.5x_2 & \text{jinak,} \end{cases}$$

Z best-reponse funkce se proto použije 3. řádek a dostaneme $x_3 = 2$. (Lze si všimnout, že druhý řádek vede ke stejnému výsledku. Proč?)

Cena bude $6 - 0.5(3 + 2) = 3.5$.

Hráč 3 vůdce, 1 a 2 následníci. Řešme pro technickou jednoduchost pouze bez kapacit. Hráči 1 a 2 reagují na x_3, které zahrál vůdce. Jejich chování bude popsané řešením dvou rovnic o dvou neznámých s parametrem x_3

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.5x_3 & = & 5.5, \\ 0.5x_1 & + & 1x_2 & + & 0.5x_3 & = & 5.25, \end{array}$$

řešením které dostaneme nejprve

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0.75x_1 & + & 0x_2 & + & 0.25x_3 & = & 2.875, \\ 0x_1 & + & 0.75x_2 & + & 0.25x_3 & = & 2.5, \end{array}$$

a pak konečně

$$\begin{aligned} x_1(x_3) &= \tfrac{23}{6} - \tfrac{1}{3}x_3, \\ x_2(x_3) &= \tfrac{10}{3} - \tfrac{1}{3}x_3. \end{aligned}$$

Dosadíme-li tato množství do funkce

$$f_3(x_3) = x_3\left(6 - 0.5\left(\frac{23}{6} - \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}x_3 + x_3\right)\right) - 1 - 2.5x_3$$
$$= \left(6 - 2.5 - \frac{43}{12}\right)x_3 - \frac{1}{6}x_3^2 - 1 = -\frac{1}{6}x_3^2 - \frac{1}{12}x_3 - 1,$$

získáme po zderivování, že $f_3' = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{12}$. Tedy, maximum nastává, pokud $x_3 = -\frac{1}{4}$, $x_1 = \frac{47}{12}$ a $x_2 = \frac{41}{12}$.

Cena, která se na trhu utvoří, je $6 - 0.5\frac{85}{12} = 2.458\overline{3}$.

Hráč 3 vůdce, hráč 2 následník/vůdce, hráč 1 následník. Řešme opět bez kapacit. Hráč 1 má best-response funkci $g_1(x_2, x_3) = 5.5 - 0.5(x_2 + x_3)$. Výplatní funkce hráče 2 je proto

$$f_2(x_2, x_3) = x_2(6 - 0.5(5.5 - 0.5(x_2 + x_3) + x_2 + x_3)) - 2 - 0.75x_2$$
$$= 6x_2 - 2.75x_2 - 0.75x_2 - 0.25x_2^2 - 0.25x_2x_3 - 2$$
$$= -0.25x_2^2 + (2.5 - 0.25x_3)x_2 - 2$$

. Pojďme pro hráče 2 spočítat best-reponse funkci v závislosti na hráči 3. Máme $f_2' = -0.5x_2 + 2.5 - 0.25x_3$. Tedy, maximum nastává pro $x_2 = 5 - 0.5x_3$.

Nyní se podívejme na hráče 3. Ten má výplatu

$$f_3(x_3) = x_3(6 - 0.5(\overbrace{5.5 - 0.5(\overbrace{5 - 0.5x_3}^{x_2} + x_3)}^{x_1} + \overbrace{5 - 0.5x_3}^{x_2} + x_3)) - 1 - 2.5x3$$
$$= 6x_3 - 4x_3 - 2.5x_3 - 0.25x_3^2 - 1 = -0.25x_3^2 - 0.5x_3 - 1.$$

Zderivováním dostaneme $f_3' = -0.5x_3 - 0.5$. Maximum nastává pro $x_3 = -1$, tedy $x_2 = 5.5$ a $x_1 = 3.25$. Cena na trhu je $6 - 0.5(3.25 + 5.5 - 1) = 2.125$.