4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Bimaticové hry

Miroslav Rada

4. října 2022

Vysoká škola ekonomická v Praze

Bimaticové hry

Konečné hry 2 hráčů – bimaticové hry

Bimaticová hra je hra v normálním tvaru $H = (N, S, V)$ zadaná

- seznamem hráčů $N := (1, 2)$,
- seznamem prostorů strategií – $S := (X_1 = \{1, \dots, m_1\}, X_2 = \{1, \dots, m_2\})$ a
- seznamem výplatních funkcí $V := (f_1(x_1, x_2) = a_{x_1 x_2}, f_2(x_1, x_2) = b_{x_1 x_2})$, kde
    - $A, B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ jsou zadané výplatní matice, technicky se dá hra plně popsat právě těmito maticemi.

Zajímá nás:

- jak vypadají NE v ryzích a smíšených strategiích,
- jak by se měli hráči chovat, pokud bychom dovolili kooperaci
    - s přenosnou výhrou,
    - s nepřenosnou výhrou.

Pro připomenutí:

- Nashovo Ekvilibrium (NE) je (speciálně ve hře dvou hráčů) taková dvojice strategií $(x^*, y^*) \in X_1 \times X_2$, že pro všechna $x \in X_1$ a $y \in X_2$ platí:

$$a_{xy^*} \leq a_{x^*y^*}, \qquad b_{x^*y} \leq b_{x^*y^*}. \tag{1}$$

- Hry dvou hráčů $(H, S, (f_1, f_2))$ a $(H, S, (f_1 + k_1, f_2 + k_2))$ mají stejná NE pro konstanty $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, takovým hrám říkáme *strategicky ekvivalentní*.
- U konečných her lze NE v *ryzích strategiích* nalézt tak, že se naleznou dvojice strategií vyvovující nerovnostem (1) zvlášť:
    - pro každé y^* se najde (množina) x^* vyhovující $a_{xy^*} \leq a_{x^*y^*}$,
    - pro každé x^* se najde (množina) y^* vyhovující $b_{x^*y} \leq b_{x^*y^*}$,
    - NE jsou takové dvojice, strategií, které v předchozích krocích vyhovovaly oběma nerovnostem.

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 27 & 36 & 42 \\ 25 & 40 & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ 27, 15 & 36,\ 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & 40, 12 & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & 42 \\ 25 & 40 & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36,\ 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & 40, 12 & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & 42 \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36,\ 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & \color{red}{20} \\ \overline{27} & 36 & \color{red}{\overline{42}} \\ 25 & \overline{40} & \color{red}{35} \\ 2 & 2 & \color{red}{2} \\ 22 & 16 & \color{red}{17} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & 20, 12 & \color{red}{20, 10} \\ \overline{27, 15} & 36,\ 6 & \color{red}{\overline{42, 10}} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & \color{red}{35,\ 5} \\ 2, 30 & 2,\ 0 & \color{red}{2, 10} \\ 22, 30 & 16,\ 6 & \color{red}{17,\ 5} \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{27, 15} & 36,\ 6 & \overline{42, 10} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} \underline{20} & 20 & \underline{20} \\ \overline{27} & \underline{36} & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \color{red}{\underline{15}} & \color{red}{6} & \color{red}{10} \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \color{red}{\overline{\underline{27, 15}}} & \color{red}{36,\ 6} & \color{red}{\overline{42, 10}} \\ 25, 15 & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{\underline{27, 15}} & 36,\ 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ 2, 30 & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \underline{\overline{27, 15}} & 36,\ 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ \underline{2, 30} & 2,\ 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice ⇒ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \underline{\overline{27, 15}} & 36,\ 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ \underline{2, 30} & 2,\ 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice $\Rightarrow$ matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice *dvojic* $(a_{ij}, b_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \overline{27} & 36 & \overline{42} \\ 25 & \overline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20,\ 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \overline{\underline{27, 15}} & 36,\ 6 & \overline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \overline{40, 12} & 35,\ 5 \\ \underline{2, 30} & 2,\ 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16,\ 6 & 17,\ 5 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & 16,14 & 16,10 \\ 27,13 & 33,\ 7 & 40,10 \\ 23,13 & 36,14 & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & 16,14 & 16,10 \\ \overline{27,13} & 33,\ 7 & 40,10 \\ 23,13 & \overline{36,14} & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & 16,14 & 16,10 \\ \overline{27,13} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{36,14} & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{27,13} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{36,14} & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{36,14} & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ 24,26 & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \underline{\overline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \underline{\overline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ 26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$
C_2 = \begin{pmatrix}
16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\
\overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\
23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\
\underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\
\underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5
\end{pmatrix}
C_3 = \begin{pmatrix}
6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\
22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\
20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\
4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\
26,16 & 19,\ 7 & 20,\ 6
\end{pmatrix}
$$

$$
C_4 = \begin{pmatrix}
60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\
49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\
47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\
4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\
26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6
\end{pmatrix}
$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & 28,14 & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & 30,12 \\ 20,\ 8 & \overline{28,14} & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \textcolor{red}{\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & 6,14 & \textcolor{red}{6,12} \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \textcolor{red}{\overline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{28,14} & \textcolor{red}{22,\ 6} \\ 4,26 & 4,\ 0 & \textcolor{red}{4,10} \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & \textcolor{red}{20,\ 6} \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{30,12} \\ 20,\ 8 & \overline{28,14} & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \color{red}{\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ \color{red}{22,\ 8} & \color{red}{23,\ 7} & \color{red}{\overline{\underline{30,12}}} \\ 20,\ 8 & \overline{28,14} & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ 4,26 & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \color{red}{\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ \color{red}{\underline{4,26}} & \color{red}{4,\ 0} & \color{red}{4,10} \\ \overline{26,16} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$
C_2 = \begin{pmatrix}
16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\
\overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\
23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\
\underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\
\underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5
\end{pmatrix}
C_3 = \begin{pmatrix}
6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\
22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\
20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\
\underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\
\overline{\underline{26,16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6
\end{pmatrix}
$$

$$
C_4 = \begin{pmatrix}
60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\
49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\
47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\
4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\
26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6
\end{pmatrix}
$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \overline{\underline{27, 13}} & 33,\ 7 & \overline{40, 10} \\ 23, 13 & \overline{\underline{36, 14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4, 26} & 4,\ 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30, 12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28, 14}} & 22,\ 6 \\ \underline{4, 26} & 4,\ 0 & 4, 10 \\ \overline{\underline{26, 16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77,\ 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76,\ 6 \\ 4, 70 & 4,\ 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{\underline{26,16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & {\color{red}\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & {\color{red}\overline{\underline{30,12}}} \\ 20,\ 8 & {\color{red}\overline{\underline{28,14}}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ {\color{red}\overline{\underline{26,16}}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & {\color{red}60,14} & 60,12 \\ 49,35 & {\color{red}77,\ 7} & 84,12 \\ 47,35 & {\color{red}\overline{82,14}} & 76,\ 6 \\ 4,70 & {\color{red}4,\ 0} & 4,12 \\ 26,70 & {\color{red}19,\ 7} & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \textcolor{red}{\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \textcolor{red}{\overline{\underline{30,12}}} \\ 20,\ 8 & \textcolor{red}{\overline{\underline{28,14}}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \textcolor{red}{\overline{\underline{26,16}}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & 60,14 & \textcolor{red}{60,12} \\ 49,35 & 77,\ 7 & \textcolor{red}{\overline{84,12}} \\ 47,35 & \overline{82,14} & \textcolor{red}{76,\ 6} \\ 4,70 & 4,\ 0 & \textcolor{red}{4,12} \\ 26,70 & 19,\ 7 & \textcolor{red}{20,\ 6} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \overline{\underline{27, 13}} & 33,\ 7 & \overline{40, 10} \\ 23, 13 & {\color{red}\overline{\underline{36, 14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4, 26} & 4,\ 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & {\color{red}\overline{\underline{30, 12}}} \\ 20,\ 8 & {\color{red}\overline{\underline{28, 14}}} & 22,\ 6 \\ \underline{4, 26} & 4,\ 0 & 4, 10 \\ {\color{red}\overline{\underline{26, 16}}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} {\color{red}\overline{60,\ 0}} & {\color{red}\underline{60, 14}} & {\color{red}60, 12} \\ 49, 35 & 77,\ 7 & \overline{84, 12} \\ 47, 35 & \overline{82, 14} & 76,\ 6 \\ 4, 70 & 4,\ 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{\underline{26,16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & \underline{60,14} & 60,12 \\ \underline{49,35} & 77,\ 7 & \overline{84,12} \\ 47,35 & \overline{82,14} & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & {\color{red}\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & {\color{red}\overline{\underline{30,12}}} \\ 20,\ 8 & {\color{red}\overline{\underline{28,14}}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ {\color{red}\overline{\underline{26,16}}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & \underline{60,14} & 60,12 \\ \underline{49,35} & 77,\ 7 & \overline{84,12} \\ {\color{red}\underline{47,35}} & {\color{red}\overline{82,14}} & {\color{red}76,\ 6} \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{\underline{26,16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & \underline{60,14} & 60,12 \\ \underline{49,35} & 77,\ 7 & \overline{84,12} \\ \underline{47,35} & \overline{82,14} & 76,\ 6 \\ \underline{4,70} & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & {\color{red}\overline{\underline{36,14}}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & {\color{red}\overline{\underline{30,12}}} \\ 20,\ 8 & {\color{red}\overline{\underline{28,14}}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ {\color{red}\overline{\underline{26,16}}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & \underline{60,14} & 60,12 \\ \underline{49,35} & 77,\ 7 & \overline{84,12} \\ \underline{47,35} & \overline{82,14} & 76,\ 6 \\ \underline{4,70} & 4,\ 0 & 4,12 \\ {\color{red}\underline{26,70}} & {\color{red}19,\ 7} & {\color{red}20,\ 6} \end{pmatrix}$$

Příklady

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16,\ 0 & \underline{16,14} & 16,10 \\ \overline{\underline{27,13}} & 33,\ 7 & \overline{40,10} \\ 23,13 & \overline{\underline{36,14}} & 31,\ 5 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \underline{24,26} & 17,\ 7 & 19,\ 5 \end{pmatrix} C_3 = \begin{pmatrix} 6,\ 0 & \underline{6,14} & 6,12 \\ 22,\ 8 & 23,\ 7 & \overline{\underline{30,12}} \\ 20,\ 8 & \overline{\underline{28,14}} & 22,\ 6 \\ \underline{4,26} & 4,\ 0 & 4,10 \\ \overline{\underline{26,16}} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \overline{60,\ 0} & \underline{60,14} & 60,12 \\ \underline{49,35} & 77,\ 7 & \overline{84,12} \\ \underline{47,35} & \overline{82,14} & 76,\ 6 \\ \underline{4,70} & 4,\ 0 & 4,12 \\ \underline{26,70} & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \\ -1,-1 & 4,\ 4 & 0,-1 \\ 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \\ -1,-1 & 4,\ 4 & 0,-1 \\ 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \\ -1,-1 & 4,\ 4 & 0,-1 \\ 8,\ 9 & -1,-2 & 8,\ 9 \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie

Smíšené rozšíření bimaticové hry

Připomeňme:

- smíšené strategie se zavádí proto, že ryzí strategie neposkytují v určitých situacích návod k jednání,
- každá konečná hra má alespoň jedno NE ve smíšeném rozšíření.
  - Otázka: Je to však zde dostačující?

Smíšení rozšíření bimaticové hry je hra v normálním tvaru $H = ((1,2),(X_1^s, X_2^s),(f_1^s, f_2^s))$, kde

- prostory strategií hráče 1 pak má podobu $X_1^s = \{(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1)^\mathsf{T} : \sum_{j \in X_1} x_j^1 = 1, x^1 \geq 0\}$, X_2^s analogicky
- výplatní funkce jsou $f_1^s(x^1, x^2) = x^{1\mathsf{T}} A x^2$ a $f_2^s(x^1, y^2) = x^{1\mathsf{T}} B x^2$.

NE ve smíšeném rozšíření bimaticové hry

Z definičních nerovností NE a tvaru prostorů strategií lze odvodit následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{x^1 \in X_1^S, x^2 \in X_2^S, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}} \quad & F(x^1, x^2) = {x^1}^{\mathsf{T}}(A + B)x^2 - \alpha - \beta \\ & Ax^2 \leq \alpha \mathbf{1} \\ & B^{\mathsf{T}} x^1 \leq \beta \mathbf{1} \end{aligned} \tag{2}$$

Věta

Nechť je (x^1, x^2) optimální řešení úlohy (2).

Pak $F(x^1, x^2) = 0$ a (x^1, x^2) je NE bimaticové hry zadané výplatními maticemi A a B.

Alternativní zápis úlohy (2)

$$\max_{p \in \mathbb{R}^{m_1}, q \in \mathbb{R}^{m_2}} F(p, q) = \sum_{i \in X_1, j \in X_2} p_i(a_{ij} + b_{ij})q_j - \sum_{i \in X_1} p_i - \sum_{j \in X_2} q_j$$

$$\sum_{j \in X_2} a_{ij} q_j \le 1, \qquad \forall i \in X_1$$

$$\sum_{i \in X_1} b_{ij} p_i \le 1, \qquad \forall j \in X_2$$

$$p_i, q_j \ge 0, \qquad i \in X_1, j \in X_2$$

Poznámky a problémy spojené s NE ve smíšených strategiích

- Úloha (2) je úlohou nekonvexní optimalizace (kvadratická forma ${x^1}^\mathsf{T}(A+B)x^2$ je zcela obecná):
  - solvery mohou skončit v lokálním maximu (které neodpovídá NE),
  - globálních maxim může být více,
  - najít všechna maxima je obecně výpočetně neúnosné.
- V solverech lze různá globální maxima nalézt spouštěním optimalizace z různých výchozích řešení.
- Bimaticová hra, která má NE v ryzích strategiích, může mít (dominující) NE ve smíšených strategiích.

Příklad

Bimaticová hra pro dva hráče je dána následující maticí dvojic:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60,\ 0 & 60,14 & 60,12 \\ 49,35 & 77,\ 7 & 84,12 \\ 47,35 & 82,14 & 76,\ 6 \\ 4,70 & 4,\ 0 & 4,12 \\ 26,70 & 19,\ 7 & 20,\ 6 \end{pmatrix}$$

1. Nalezněte alespoň jedno Nashovo ekvilibrium v jejím smíšeném rozšíření.
2. Jaké budou rovnovážné strategie jednotlivých hráčů? Jaké budou jejich výplatní funkce?

Kooperace v bimaticových hrách

Jak na kooperaci

Připusťme spolupráci. Co má být řešením:

- závazná „smlouva" o použití strategií a dělení výhry,
- ...nebo nekooperace.

Lze rozlišit kooperaci :

- s přenosnou výhrou (výhru koalice lze přerozdělit), a
- s nepřenosnou výhrou – každý vyhraje pouze a jen hodnotu své výplatní funkce.

Hledá se odpověď na otázky:

1. kdy má smysl kooperovat,
2. jaké strategie případně dohodnout (triviální u přenosné výhry),
3. jak rozdělit výhru (odpadá u nepřenosné výhry).

Kdy se vyplatí kooperovat – přenosná výhra

Zřejmě – kooperace je výhodná, pokud si hráči polepší oproti stavu, kdy nekooperují.

- Je-li N množina hráčů, zavedeme tzv. *charakteristickou funkci*, která každé koalici K (podmnožině N) přiřadí celkovou výhru, kterou si daná koalice zajistí tím, že bude spolupracovat, tedy
- $v(K)$ je výhra koalice K.

Aby kooperace byla výhodná, zřejmě musí v bimaticové hře platit $v(\{1,2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$.

- Zřejmě $v(\{1,2\}) = \max_{x,y} a_{xy} + b_{xy}$ (snadné).
- Problém: jak zjistit $v(\{1\})$ a $v(\{2\})$?

Stanovení $v(\{i\})$

Je třeba vyřešit otázku, jaká bude výhra hráčů, pokud by se na kooperaci nedohodli. Možnosti:

- maximalizace jisté (zaručené) výhry (*minimax*)
  - odůvodnění: hráči se připravují na nejhorší scénář; navzájem si hrozí poškozováním
  - $v(\{1\}) = \max_{x \in X_1} \min_{y \in X_2} a_{xy}$
  - $v(\{2\}) = \max_{y \in X_2} \min_{x \in X_1} b_{xy}$
- použití výher při nekooperaci (*kompetitivnost*) – problematické kvůli nejednoznačnosti
- hra proti náhodnému mechanismu (*nedostatečná evidence*)
  - odůvodnění: situace je natolik nepřehledná, že se dá očekávat, že protihráč se bude chovat jako náhodný mechanismus
  - $v(\{1\}) = \max_{x \in X_1} \frac{1}{m_2} \sum_{y \in X_2} a_{ij}$
  - $v(\{2\}) = \max_{y \in X_2} \frac{1}{m_1} \sum_{x \in X_1} b_{ij}$

Dělení výhry

Známe-li $v(\{1,2\})$, $v(\{1\})$ i $v(\{2\})$, víme, že nutnou podmínkou pro kooperaci je $v(\{1,2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$. Výhru $v(\{1,2\})$ si hráči v případě kooperace dělí.

Označme a_1 a a_2 podíly hráčů na výhře koalice $\{1,2\}$. Hráči zřejmě budou ochotni dohodnout nějaké „spravedlivé" dělení splňující:

$$
\begin{aligned}
v(\{1,2\}) &= a_1 + a_2 \\
v(\{1\}) &\leq a_1 \\
v(\{2\}) &\leq a_2
\end{aligned} \tag{3}
$$

Jednotlivá dělení splňující (3) se nazývají *imputace*, množina všech imputací se nazývá *jádro hry*.

Výběr spravedlivé imputace z jádra

„Spravedlivé" je to, s čím hráči souhlasí. Nabízí se:

- použít těžiště jádra – rozdělit efekt kooperace napůl
  - odůvodnění: oba hráči se na vzniku koalice podílejí stejnou měrou
  - $a_1 = v(\{1\}) + 0.5(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
  - $a_2 = v(\{2\}) + 0.5(v(\{1,2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
- $a_1 : a_2 = v(\{1\}) : v(\{2\})$
- $a_1 : a_2 = (v(\{1,2\}) - v(\{2\})) : (v(\{1,2\} - v(\{1\}))$

Patří dělení získaná pomocí dvou posledně jmenovaných možností jistě do jádra hry?

Jak na nepřenosnou výhru

Zadání:

- Máme zadanou hru $((1,2),(X,Y),(f_1(x,y) = a_{xy}, f_2(x,y) = b_{xy}))$

Hledáme odpověď na otázky:

- kdy má smysl kooperovat, a
- jaké strategie dohodnout (explicitně se omezíme na prostor ryzích strategií, tedy $X = \{1,\dots,m_1\}$ a $Y = \{1,\dots,m_2\}$).

Postup:

- Najdeme *dosažitelná rozdělení*, z nich vezmeme *nedominovaná*
- Existuje-li alespoň jedno dosažitelné rozdělení, vybereme *nejlepší*

Dosažitelná rozdělení

Dosažitelná rozdělení formálně.

Dosažitelné rozdělení je taková dvojice (p_1, p_2), že $(p_1, p_2) \geq (v(\{1\}), v(\{2\}))$ a zároveň platí, že existuje takové $x \in X, y \in Y$, že $a_{xy} = p_1, b_{xy} = p_2$.

Množinu všech dosažitelných rozdělení budeme značit D.

Neformálně: dosažitelná rozdělení odpovídají těm dvojicím strategií, pro které jsou výplaty obou hráčů alespoň takové, jako jsou zaručené výhry.

Nedominovaná dosažitelná rozdělení formálně.

Dosažitelné rozdělení (p_1, p_2) je *nedominované*, neexistuje-li dosažitelné rozdělení (q_1, q_2) takové, že $(q_1, q_2) \gneqq (p_1, p_2)$. Množinu všech značme D_n.

Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud $D \neq \emptyset$. Navíc, pak platí i $D_n \neq \emptyset$. Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$. Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na toto jediné nedominované dosažitelné rozdělení.
- $|D_n| > 1$. Je nutné vybrat „nejlepší“ nedominované rozdělení.

Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud $D \neq \emptyset$. Navíc, pak platí i $D_n \neq \emptyset$. Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$. Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na toto jediné nedominované dosažitelné rozdělení.
- $|D_n| > 1$. Je nutné vybrat „nejlepší" nedominované rozdělení.
  - Problém: co je nejlepší?
  - Výsledkem jistě musí být nějaké nedominované dosažitelné rozdělení.

Idea průměrného nedominovaného dělení

- Řekněme, že jsou všechna nedominovaná dělení možná.
- Spočtěme střední výplatu přes D_n:

$$(\overline{p_1}, \overline{p_2}) = \sum_{(p_1,p_2)\in D_n} \frac{(p_1, p_2)}{|D_n|}$$

.

- Nyní můžeme za nejlepší dělení (p'_1, p'_2) prohlásit to, které je „nejblíže“ $(\overline{p_1}, \overline{p_2})$ v nějaké metrice d:

$$(p'_1, p'_2) = \arg\min_{(p_1,p_2)\in D_n} d((p_1, p_2), (\overline{p_1}, \overline{p_2})),$$

pro euklidovskou metriku tedy

$$(p'_1, p'_2) = \arg\min_{(p_1,p_2)\in D_n} \sqrt{(p_1 - \overline{p_1})^2 + (p_2 - \overline{p_2})^2}.$$

Idea založené na přírůstku k zaručeným výhrám

- Vezměme za nejlepší nedominované dosažitelné dělení to, které má největší možný menší z přírůstků k zaručeným výhrám:

$$(p'_1, p'_2) = \arg \max_{(p_1,p_2)\in D_n} \min\{p_1 - v(\{1\}), p_2 - v(\{2\})\}.$$

- Různé jiné způsoby?

Příklad

Použijme výše uvedené postupy na bimaticovou hru určenou dvoumaticí

$$C = \begin{pmatrix} 4,5 & 8,4 & 6,7 \\ 1,1 & 0,0 & 9,3 \\ 3,2 & 6,1 & 7,2 \end{pmatrix}.$$