4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hry v rozvinutém tvaru

Miroslav Rada

11. října 2022

Vysoká škola ekonomická v Praze

Hra v rozvinutém tvaru – příběh

- Mějme hru s řadou po sobě jdoucích rozhodnutí.
- Hra se v každém okamžiku nachází v nějakém stavu. Stav je určen počátečním modelem hry a předcházejícími rozhodnutími. Poté, co je přijato nějaké rozhodnutí, se stav hry může změnit. Stavy jsou rozhodovací nebo pravděpodobnostní.
- V každém rozhodovacím stavu se rozhoduje právě jeden hráč, který vybírá některý ze spočetně mnoha dalších stavů.
- Příklad: šachy, jiné hry apod.
- Pravděpodobnosti přechodů v pravděpodobnostních stavech jsou předem určené.

Můžeme zobecnit: simultánní rozhodování, nespočetně možností...

Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *Battle of Sexes* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Připomeňme, že ve hře jsou dvě NE v ryzích strategiích, ani jedno nedominuje to druhé.

Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *Battle of Sexes* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Připomeňme, že ve hře jsou dvě NE v ryzích strategiích, ani jedno nedominuje to druhé.

Modifikace
Řekněme, že jeden z manželů odchází z práce dřív a koupí lístek dle vlastního výběru. Druhý se buď přidá, nebo si koupí vlastní lístek na druhý konzert.

- Jak se mají hráči chovat, pokud se bude rozhodovat dříve řádkový hráč?
- A co v případě sloupcového hráče?

Piškvorky 3 × 3

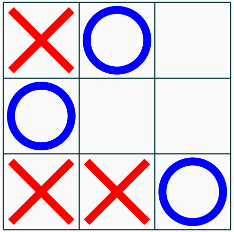
- Mějme piškvorky v mřížce 3 × 3. Velikost políčka je 1cm × 1cm.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka (velikost značky libovolná).
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Piškvorky 3×3

- Mějme piškvorky v mřížce 3×3. Velikost políčka je 1cm × 1cm.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka.
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

Otázky:

- Odvoďme nějakou horní mez počtu stavů, do kterých se hra může dostat.
- Sestavme graf podhry, nacházející se ve stavu níže (modrý na tahu).



Jaké otázky si klást?

- Jaké otázky si klást?
- Jak hra dopadne?
  - Jaké budou výplaty hráčů?
  - Jakými strategiemi se výplat dosáhne?
- Co je zde vlastně strategie?
- Jak by hra dopadla, pokud by byla v jiném stavu než počátečním?
  - Dokonalá rovnováha podhry!
- Jak těžké je spočítat odpovědi na předchozí otázky?
  - Jak velký je explicitní popis hry?
- Je-li zadán stav, jakou posloupností stavů se do něj hra dostala?
  - Retrográdní analýza!

Model hry v rozvinutém tvaru – poznámky a způsob řešení

- Graf je typicky strom (tj. souvislý acyklický).
- Graf může být složitý, ale dá se zestromovatět (na nekonečnou výšku nebo šířku).
- Informace, co přesně znamenají jednotlivá rozhodnutí, v modelu obecně být nemusí. Pokud dvě různá rozhodnutí vedou do stejného stavu, model to nemusí rozlišovat.

Způsob řešení u acyklického grafu s nezávislými rozhodnutími hráčů:

- Každému stavu pro každého hráče přiřadit celkovou výplatu, kterou hráč získá, pokud se hra do daného stavu dostane.
- Odspodu: v listech jsou výplaty jasné. Vedou-li z nějakého stavu hrany jen do už vyhodnocených uzlů, lze vybrat nejlepší rozhodnutí pro hráče, který se právě rozhoduje.

Otrávená čokoláda

Situace:

- je dána tabulka čokolády o rozměru $m \times n$, $\max\{m, n\} > 1$, tvořená čtvercovými dílky
- dílek na pozici $(1, 1)$ je otrávený
- hráči čokoládu postupně ujídají
- kdo sní otrávený dílek, prohrál
- hráč, který je na tahu, vybere nesnědený dílek (i, j) a sní vše, co ještě není snědené, v obdélníku $(i, j), (i, n), (m, j), (m, n)$

Hru je možné hrát na `http://hry.polyedr.cz/chocolate`.

Úkoly.

- Uvažujme hru s $m = n > 1$. Popišme vyhrávající strategii pro hráče, který začíná.
- Dokažme, že (obecně) existuje vyhrávající strategie pro hráče, který začíná.
- Ukažme, že počet stavů, do kterých se hra může dostat, je exponenciálně velký v $\Omega(\min\{m, n\})$ (tj. že vyhrávající strategii není únosné hledat hrubou silou; $\Omega(x)$ znamená funkci větší než nějaká lineární funkce x).

Příklad – pistolníci

Situace:

- Tři pistolníci jsou v souboji.
- Pokud jsou na řadě se střelbou, trefí vybraného soupeře se s pravděpodobnostmi $p_1 = 1/3, p_2 = 1/2, p_3 = 1$.
- Mohou střílet buď na soupeře podle vlastního výběru, nebo do vzduchu ($p = 1$).
- Pokud je některý pistolník zasažen, dál se neúčastní.
- První střílí 1, pak 2, účastní-li se ještě, pak 3 účastní-li se ještě, pak 1, účastní-li se ještě, atd.

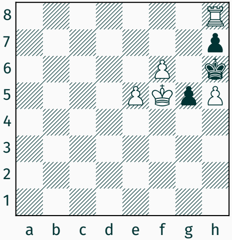
Cíl: maximalizovat pravděpodobnost, že v souboji zůstane jako poslední.
Otázky: na koho má střílet první pistolník? Jaká je pravděpodobnost jeho výhry?
Zjednodušující předpoklady: (dokažte, že se dají vyvodit z pravidel výše!)

- pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3,
- pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2,
- pokud jsou naživu již jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.

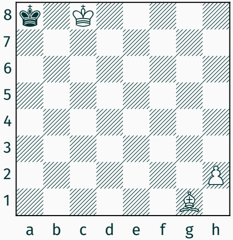
Retrográdní analýza – příklady

Pozice níže byly dosaženy posloupnostmi přípustných tahů. Bílý je vždy na tahu. Vyřešte jednotlivé úlohy!

Mat druhým tahem.



Jaký byl poslední tah bílého?



Určete, zda bílý smí rošovat.