

# 4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

## Opakované hry

---

MIROSLAV RADA

8. listopadu 2022

Vysoká škola ekonomická v Praze

## Model opakované hry

---

# Model opakované hry

## Motivace:

- v mnoha situacích se hry hrají opakovaně
- opakování může vést ke kooperaci nebo k naučení soupeřovy strategie

## Situace:

- Je dána (konečná) hra v normálním tvaru  $H = ((1, 2), (A_1, A_2), (f_1, f_2))$ .
- Hráči hru  $T + 1$ -krát hrají ( $T$  obecně nemusí být známé, případně  $T = \infty$ )
- Budoucí výplaty se diskontují faktorem  $\delta < 1$ .

## Značení:

- $a_i^t$  – strategie, kterou hráč  $i$  zvolí v čase  $t$
- $a^t := (a_1^t, a_2^t)$ ;  $a := (a^0, \dots, a^T)$
- $F_i(a) := (1 - \delta) \sum_{t=0}^T \delta^t f_i(a^t)$  – výplata hráče  $i$
- $H^T(\delta)$  – opakovaná hra s  $H$ ,  $\delta$  a  $T$ .

# Vězňovo dilema – modelový příklad

## Klasické vězňovo dilema

Mějme klasické vězňovo dilema s maticí

	Spolupráce	Zrada
Spolupráce	1; 1	-1; 2
Zrada	2; -1	0; 0

## Nashovo ekvilibrum

- jediné: (Z, Z) s výplatami (0, 0)
- strategie S je dominovaná (pro oba hráče)

## Konečný počet opakování

---

### Idea – zpětná indukce a dokonalá rovnováha podhry

- V čase  $T$  se hráči chovají podle NE – hrají (Z,Z)
- v čase  $T - 1$  vědí, že v následující hře budou hrát (Z,Z), nepřipadá tedy v úvahu žádný „trest“. Na jejich akci tedy hra v následujícím kole nezávisí  $\Rightarrow$  opět hrají NE.
- indukci až do času 0...

### Věta

*Uvažujme opakovanou hru  $H^T(\delta)$  pro  $T < \infty$ . Má-li hra  $H$  jediné NE, označme jej  $a^*$ , má hra  $H^T(\delta)$  unikátní ekvilibrium, ve kterém  $a = (a^*, \dots, a^*)$ .*

## Nekonečný počet opakování

---

## Implicitně dohodnutá strategie

- Předpokládejme, že existuje „dobrá“ kombinace strategií, která sice není NE, ale hráči mají motivaci ji hrát
- Navíc existuje strategie, kterou mohou hráči hrát jako „trest“
- Ve vězňově dilematu:
  - dobré strategie: (S, S) (výplata 1; 1)
  - trest: volba strategie Z (výplata -1 nebo 0 pro trestaného hráče)

# Různé strategie

- Vždy podvádějte (Always defect)

$$a_i^t = Z \quad \forall t = 0, \dots, T$$

- Vždy spolupracujte (Always cooperate)

$$a_i^t = S \quad \forall t = 0, \dots, T$$

- Neomezená odplata (Grim trigger)

$$a_i^t = \begin{cases} Z & \text{pokud } \exists t' \in \{0, \dots, t-1\} \mid a_j^{t'} = Z, \\ S & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Oko za oko (Tit-for-Tat)

$$a_i^t = \begin{cases} S & \text{pokud } t = 0, \\ S & \text{pokud } t > 0 \wedge a_j^{t-1} = S \text{ pro } j \neq i, \\ Z & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Omezená odplata (Limited retaliation) – je dáno  $k \in \mathbb{N}$

$$a_i^t = \begin{cases} Z & \text{pokud } \exists j \neq i \exists t' \in \{t-k, \dots, t-1\} \mid a_j^{t'} = Z \\ S & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Win-Stay, Lose-Shift

## (Grim trigger, Grim trigger) je NE pokud $\delta \geq 0.5$

- Pokud oba hráči hrají grim trigger, žádný z hráčů nemá motivaci se od předpisu Grim triggeru odchylovat.
- Předpis Grim triggeru říká, že  $a^t = (S,S)$  pro  $t = 0, 1, \dots$
- Dejme tomu, že se hráč  $i$  odchýlí v čase  $t'$ . Pak neodchylující se hráč  $j$  bude hrát  $a_j^t = Z$  pro všechna  $t = t' + 1, \dots, \infty$
- Pak ale pro hráče  $i$  je optimální hrát také Z, je to totiž best response podle NE.
- Ukažme, že se nevyplatí se odchýlit:
  - před odchýlením výplaty stejné, řekněme, že k odchýlení dojde v čase 0
  - výplata po odchýlení:  
$$F_i = (1 - \delta)(2 + 0\delta^1 + 0\delta^2 + \dots) = 2(1 - \delta)$$
  - výplata bez odchýlení:  
$$F_i = (1 - \delta)(\delta^0 + \delta^1 + \dots) = (1 - \delta) \frac{1}{1 - \delta} = 1$$
  - pokud  $2(1 - \delta) \geq 1$ , vyplatí se Z. Tedy, pokud  $\delta \geq \frac{1}{2}$ , S je lepší a odchylovat se nevyplatí.

Dá se zobecnit  $\Rightarrow$  „Folk theorem“