

4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Bimaticové hry

MIROSLAV RADA

1. října 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

Bimaticové hry

Konečné hry 2 hráčů – bimaticové hry

Bimaticová hra je hra v normálním tvaru $H = (N, S, V)$ zadaná

- seznamem hráčů $N := (1, 2)$,
- seznamem prostorů strategií – $S := (X_1 = \{1, \dots, m_1\}, X_2 = \{1, \dots, m_2\})$ a
- seznamem výplatních funkcí $V := (f_1(x_1, x_2) = A_{x_1 x_2}, f_2(x_1, x_2) = B_{x_1 x_2})$, kde
 - $A, B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ jsou zadané výplatní matice, technicky se dá hra plně popsat právě těmito maticemi.

Zajímá nás:

- jak vypadají NE v ryzích a smíšených strategiích,
- jak by se měli hráči chovat, pokud bychom dovolili kooperaci
 - s přenosnou výhrou,
 - s nepřenosnou výhrou.

Pro připomenutí:

- Nashovo Ekvilibrium (NE) je (speciálně ve hře dvou hráčů) taková dvojice strategií $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, že pro všechna $x_1 \in X_1$ a $x_2 \in X_2$ platí:

$$A_{x_1 x_2^*} \leq A_{x_1^* x_2^*}, \quad B_{x_1^* x_2} \leq B_{x_1^* x_2^*}. \quad (1)$$

- Hry dvou hráčů $(H, S, (f_1, f_2))$ a $(H, S, (f_1 + k_1, f_2 + k_2))$ mají stejná NE pro konstanty $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, takovým hrám říkáme *strategicky ekvivalentní*.
- U konečných her lze NE v *ryzích strategiích* nalézt tak, že se naleznou dvojice strategií vyvovující nerovnostem (1) zvlášť:
 - pro každé x_2^* se najde (množina) x_1^* vyhovující $A_{x_1 x_2^*} \leq A_{x_1^* x_2^*}$,
 - pro každé x_1^* se najde (množina) x_2^* vyhovující $B_{x_1^* x_2} \leq B_{x_1^* x_2^*}$,
 - NE jsou takové dvojice strategií, které v předchozích krocích vyhovovaly oběma nerovnostem.

Dvě matice \Rightarrow matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice dvojic $(A_{ij}, B_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 27 & 36 & 42 \\ 25 & 40 & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 10 \\ 15 & 6 & 10 \\ 15 & 12 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 30 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & 20, 12 & 20, 10 \\ 27, 15 & 36, 6 & 42, 10 \\ 25, 15 & 40, 12 & 35, 5 \\ 2, 30 & 2, 0 & 2, 10 \\ 22, 30 & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

Dvě matice \Rightarrow matice dvojic

Může být přehledné hru zanést do matice dvojic $(A_{ij}, B_{i,j})$.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ \underline{27} & \underline{36} & \underline{42} \\ 25 & \underline{40} & 35 \\ 2 & 2 & 2 \\ 22 & 16 & 17 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \underline{12} & 10 \\ \underline{15} & 6 & 10 \\ \underline{15} & 12 & 5 \\ \underline{30} & 0 & 10 \\ \underline{30} & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 20, 0 & \underline{20, 12} & 20, 10 \\ \underline{27, 15} & 36, 6 & \underline{42, 10} \\ \underline{25, 15} & \underline{40, 12} & 35, 5 \\ \underline{2, 30} & 2, 0 & 2, 10 \\ \underline{22, 30} & 16, 6 & 17, 5 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & 16, 14 & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & 40, 10 \\ 23, 13 & 36, 14 & 31, 5 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 24, 26 & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & 6, 14 & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & 30, 12 \\ 20, 8 & 28, 14 & 22, 6 \\ 4, 26 & 4, 0 & 4, 10 \\ 26, 16 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 16, 0 & \underline{16, 14} & 16, 10 \\ \underline{27, 13} & 33, 7 & \underline{40, 10} \\ 23, 13 & \underline{36, 14} & 31, 5 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{24, 26} & 17, 7 & 19, 5 \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 6, 0 & \underline{6, 14} & 6, 12 \\ 22, 8 & 23, 7 & \underline{30, 12} \\ 20, 8 & \underline{28, 14} & 22, 6 \\ \underline{4, 26} & 4, 0 & 4, 10 \\ \underline{26, 16} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} \underline{60, 0} & \underline{60, 14} & 60, 12 \\ \underline{49, 35} & 77, 7 & \underline{84, 12} \\ \underline{47, 35} & \underline{82, 14} & 76, 6 \\ \underline{4, 70} & 4, 0 & 4, 12 \\ \underline{26, 70} & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

Řešení bimaticové hry v ryzích strategiích

Za předpokladu, že připouštíme řešení pouze v ryzích strategiích, mohou zřejmě nastat následující případy:

1. hra má jediné NE,
2. hra má více NE, z nichž jedno dominuje ostatní,
3. hra má více NE, mezi nimiž existuje záměnná soustava takových NE, které dominují ostatní NE,
4. hra má více NE, žádné z nich nedominuje všechna ostatní,
5. hra nemá žádné NE.

NE v ryzích strategiích vede k cíli v případech 1–3.

Příklad hry se záměnnou soustavou NE:

$$\begin{pmatrix} 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \\ -1, -1 & 4, 4 & 0, -1 \\ 8, 9 & -1, -2 & 8, 9 \end{pmatrix}$$

Smíšené strategie

Smíšené rozšíření bimaticové hry

Připomeňme:

- smíšené strategie se zavádí proto, že ryzí strategie neposkytují v určitých situacích návod k jednání,
- každá konečná hra má alespoň jedno NE ve smíšeném rozšíření.
 - Otázka: Je to však zde dostačující?

Smíšené rozšíření bimaticové hry je hra v normálním tvaru $H = ((1, 2), (X_1^S, X_2^S), (f_1^S, f_2^S))$, kde

- prostory strategií hráče 1 pak má podobu $X_1^S = \{(x_1^1, \dots, x_{m_1}^1)^T : \sum_{j \in X_1} x_j^1 = 1, \mathbf{x}^1 \geq 0\}$,
 X_2^S analogicky
- výplatní funkce jsou $f_1^S(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^{1T} \mathbf{A} \mathbf{x}^2$ a $f_2^S(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^{1T} \mathbf{B} \mathbf{x}^2$.

NE ve smíšeném rozšíření bimaticové hry

Z definičních nerovností NE a tvaru prostorů strategií lze odvodit následující úlohu:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}^1 \in X_1^S, \mathbf{x}^2 \in X_2^S, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}} \quad & F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) = \mathbf{x}^{1T}(A + B)\mathbf{x}^2 - \alpha - \beta \\ & A\mathbf{x}^2 \leq \alpha \mathbf{1} \\ & B^T \mathbf{x}^1 \leq \beta \mathbf{1} \end{aligned} \tag{2}$$

Věta

Nechť je (x^1, x^2) optimální řešení úlohy (2).

Pak $F(x^1, x^2) = 0$ a (x^1, x^2) je NE bimaticové hry zadané výplatními maticemi A a B .

Alternativní zápis úlohy (2)

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{m_1}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^{m_2}} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{i \in X_1, j \in X_2} p_i (A_{ij} + B_{ij}) q_j - \sum_{i \in X_1} p_i - \sum_{j \in X_2} q_j \\ \sum_{j \in X_2} A_{ij} q_j &\leq 1, \quad \forall i \in X_1 \\ \sum_{i \in X_1} B_{ij} p_i &\leq 1, \quad \forall j \in X_2 \\ p_i, q_j &\geq 0, \quad i \in X_1, j \in X_2 \end{aligned}$$

- Úloha (2) je úlohou nekonvexní optimalizace (bilineární forma $\mathbf{x}^{1T}(A + B)\mathbf{x}^2$ je zcela obecná):
 - solvery mohou skončit v lokálním maximu (které neodpovídá NE),
 - globálních maxim může být více,
 - najít všechna maxima je obecně výpočetně neúnosné.
- V solvech lze různá globální maxima nalézt spouštěním optimalizace z různých výchozích řešení.
- Bimaticová hra, která má NE v ryzích strategiích, může mít (dominující) NE ve smíšených strategiích.

Bimaticová hra pro dva hráče je dána následující maticí dvojic:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 60, 0 & 60, 14 & 60, 12 \\ 49, 35 & 77, 7 & 84, 12 \\ 47, 35 & 82, 14 & 76, 6 \\ 4, 70 & 4, 0 & 4, 12 \\ 26, 70 & 19, 7 & 20, 6 \end{pmatrix}$$

1. Nalezněte alespoň jedno Nashovo ekvilíbrio v jejím smíšeném rozšíření.
2. Jaké budou rovnovážné strategie jednotlivých hráčů? Jaké budou jejich výplatní funkce?

Kooperace v bimaticových hrách

Jak na kooperaci

Připusťme spolupráci. Co má být řešením:

- závazná „smlouva“ o použití strategií a dělení výhry,
- ...nebo nekooperace.

Lze rozlišit kooperaci :

- s přenosnou výhrou (výhru koalice lze přerozdělit), a
- s nepřenosnou výhrou – každý vyhraje pouze a jen hodnotu své výplatní funkce.

Hledá se odpověď na otázky:

1. kdy má smysl kooperovat,
2. jaké strategie případně dohodnout (triviální u přenosné výhry),
3. jak rozdělit výhru (odpadá u nepřenosné výhry).

Kdy se vyplatí kooperovat – přenosná výhra

Zřejmě – kooperace je výhodná, pokud si hráči polepší oproti stavu, kdy nekooperují.

- Je-li N množina hráčů, zavedeme tzv. *charakteristickou funkci*, která každé koalici K (podmnožině N) přiřadí celkovou výhru, kterou si daná koalice zajistí tím, že bude spolupracovat, tedy
- $v(K)$ je výhra koalice K .

Aby kooperace byla výhodná, zřejmě musí v bimaticové hře platit $v(\{1, 2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$.

- Zřejmě $v(\{1, 2\}) = \max_{x_1, x_2} A_{x_1 x_2} + B_{x_1 x_2}$ (snadné).
- Problém: jak zjistit $v(\{1\})$ a $v(\{2\})$?

Stanovení $v(\{i\})$

Je třeba vyřešit otázku, jaká bude výhra hráčů, pokud by se na kooperaci nedohodli.
Možnosti:

- maximalizace jisté (zaručené) výhry (*minimax*)
 - odůvodnění: hráči se připravují na nejhorší scénář; navzájem si hrozí poškozováním
 - $v(\{1\}) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} A_{x_1 x_2}$
 - $v(\{2\}) = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} B_{x_1 x_2}$
- použití výher při nekooperaci (*kompetitivnost*) – problematické kvůli nejednoznačnosti
- hra proti náhodnému mechanismu (*nedostatečná evidence*)
 - odůvodnění: situace je natolik nepřehledná, že se dá očekávat, že protihráč se bude chovat jako náhodný mechanismus
 - $v(\{1\}) = \max_{x_1 \in X_1} \frac{1}{m_2} \sum_{x_2 \in X_2} A_{x_1 x_2}$
 - $v(\{2\}) = \max_{x_2 \in X_2} \frac{1}{m_1} \sum_{x_1 \in X_1} B_{x_1 x_2}$

Známe-li $v(\{1, 2\})$, $v(\{1\})$ i $v(\{2\})$, víme, že nutnou podmínkou pro kooperaci je $v(\{1, 2\}) \geq v(\{1\}) + v(\{2\})$. Výhru $v(\{1, 2\})$ si hráči v případě kooperace dělí.

Označme a_1 a a_2 podíly hráčů na výhře koalice $\{1, 2\}$. Hráči zřejmě budou ochotni dohodnout nějaké „spravedlivé“ dělení splňující:

$$\begin{aligned}v(\{1, 2\}) &= a_1 + a_2 \\v(\{1\}) &\leq a_1 \\v(\{2\}) &\leq a_2\end{aligned}\tag{3}$$

Jednotlivá dělení splňující (3) se nazývají *imputace*, množina všech imputací se nazývá *jádro hry*.

„Spravedlivé“ je to, s čím hráči souhlasí. Nabízí se:

- použít těžiště jádra – rozdělit efekt kooperace napůl
 - odůvodnění: oba hráči se na vzniku koalice podílejí stejnou měrou
 - $a_1 = v(\{1\}) + 0.5(v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
 - $a_2 = v(\{2\}) + 0.5(v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) - v(\{2\}))$
- $a_1 : a_2 = v(\{1\}) : v(\{2\})$
- $a_1 : a_2 = (v(\{1, 2\}) - v(\{2\})) : (v(\{1, 2\}) - v(\{1\}))$

Patří dělení získaná pomocí dvou posledně jmenovaných možností jistě do jádra hry?

Jak na nepřenosnou výhru

Zadání:

- Máme zadanou hru $((1, 2), (X_1, X_2), (f_1(x_1, x_2) = A_{x_1x_2}, f_2(x_1, x_2) = B_{x_1x_2}))$

Hledáme odpověď na otázky:

- kdy má smysl kooperovat, a
- jaké strategie dohodnout (explicitně se omezíme na prostor ryzích strategií, tedy $X_1 = \{1, \dots, m_1\}$ a $X_2 = \{1, \dots, m_2\}$).

Postup:

- Najdeme *dosažitelné dvojice výplaty*, z nich vezmeme *nedominované*
- Existuje-li alespoň jedna dosažitelné dvojice výplat, vybereme *nejlepší*

Dosažitelné výplaty

Dosažitelné dvojice výplat formálně.

Dosažitelná dvojice výplat je taková dvojice (p_1, p_2) , že $(p_1, p_2) \geq (v(\{1\}), v(\{2\}))$ a zároveň platí, že existuje takové $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$, že $A_{x_1 x_2} = p_1, B_{x_1 x_2} = p_2$.

Množinu všech dosažitelných (dvojic) výplat budeme značit D .

Neformálně: dosažitelné výplaty odpovídají těm dvojicím strategií, pro které jsou výplaty obou hráčů alespoň takové, jako jsou zaručené výhry.

Nedominované dosažitelné dvojice výplat formálně.

Dosažitelná dvojice výplat (p_1, p_2) je *nedominovaná*, neexistuje-li dosažitelná dvojice výplat (q_1, q_2) taková, že $(q_1, q_2) \gneq (p_1, p_2)$. Množinu všech značme D_n .

Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud $D \neq \emptyset$. Navíc, pak platí i $D_n \neq \emptyset$. Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$. Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na tyto jediné nedominované výplaty.
- $|D_n| > 1$. Je nutné vybrat „nejlepší“ nedominovanou dvojici výplat.

Je kooperace výhodná? A co pak?

Zřejmě, kooperace je výhodná, pokud $D \neq \emptyset$. Navíc, pak platí i $D_n \neq \emptyset$. Dvě možnosti:

- $|D_n| = 1$. Pak se hráč dohodnou na těch strategiích, které vedou na tyto jediné nedominované výplaty.
- $|D_n| > 1$. Je nutné vybrat „nejlepší“ nedominovanou dvojici výplat.
 - Problém: co je nejlepší?
 - Výsledkem jistě musí být nějaká nedominovaná dvojice výplat.

Idea průměrných nedominovaných výplat

- Řekněme, že jsou všechny nedominované dvojice výplat možné.
- Spočtěme střední výplatu přes D_n :

$$(\bar{p}_1, \bar{p}_2) = \sum_{(p_1, p_2) \in D_n} \frac{(p_1, p_2)}{|D_n|}$$

- Nyní můžeme za nejlepší dvojici (p'_1, p'_2) prohlásit tu, které je „nejblíže“ (\bar{p}_1, \bar{p}_2) v nějaké metrice d :

$$(p'_1, p'_2) = \arg \min_{(p_1, p_2) \in D_n} d((p_1, p_2), (\bar{p}_1, \bar{p}_2)),$$

pro euklidovskou metriku tedy

$$(p'_1, p'_2) = \arg \min_{(p_1, p_2) \in D_n} \sqrt{(p_1 - \bar{p}_1)^2 + (p_2 - \bar{p}_2)^2}.$$

Idea založené na přírůstku k zaručeným výhrám

- Vezměme za nejlepší nedominovanou dvojici výplat tu, která má největší možný menší z přírůstků k zaručeným výhrám:

$$(p'_1, p'_2) = \arg \max_{(p_1, p_2) \in D_n} \min\{p_1 - v(\{1\}), p_2 - v(\{2\})\}.$$

- Různé jiné způsoby?

Použijme výše uvedené postupy na bimaticovou hru určenou dvoumaticí

$$C = \begin{pmatrix} 4,5 & 8,4 & 6,7 \\ 1,1 & 0,0 & 9,3 \\ 3,2 & 6,1 & 7,2 \end{pmatrix}.$$