4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Maticové hry a hry s konstantním součtem obecně

Miroslav Rada

24. září 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je $f_i : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \dots \times X_n$.

Trojice (N, X, f) je hra v normálním tvaru.

- $x_i \in X_i$ – strategie i-tého hráče
- $(x_1, \dots, x_n) \in X$ – strategie všech hráčů, strategický profil nebo kombinace strategií

Co považovat za řešení?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

Nashovo equilibrium

Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, že pro každého hráče, řekněme i-tého, platí, že pro všechna $x_i \in X_i$ je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ budeme značit (x_i, x_{-i}^*)

Best-response funkce

Podle definice Nashova ekvilibria je x^* ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna i (tj. pro každého hráče) platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{-i}).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat x_i^* v závislosti na x_{-i}. Definujme tzv. *best-response funkci* i-tého hráče, značenou g_i. Zřejmě $g_i : X_{-i} \to 2^{X_i}$:

$$g_i(x_{-i}) \coloneqq \{x_i \in X_i \,:\, f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_i)\}.$$

Zřejmě, x^* je Nashovo ekvilibrium, pokud $x_i^* \in g_i(x_{-i})$ pro všechna $i \in N$.

Konstantní součet

Hra s konstantním součtem v normálním tvaru

Hra s konstantním součtem je hra v normálním tvaru $H = (N, S, V)$ zadaná

- seznamem hráčů $N := (1, \dots, n)$,
- seznamem prostorů strategií – $S := (X_1, \dots, X_n)$ a
- seznamem výplatních funkcí $V := (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in N$ je $f_i : X \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ a
  - $\sum_{i \in N} f_i = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$.

Budeme se zabývat hledáním Nashových ekvilibrií pro tyto hry.

Převod na hru s nulovým součtem

Mějme hru $H = (N, S, f_1, \dots, f_n)$. Definujme $f_1'(x) = f_1(x) - \kappa$.
Uvažujme hru $H' = (N, S, (f_1', f_2, \dots, f_n))$.

Tvrzení

Strategický profil $x^* \in X$ je NE hry H, právě když tento profil je NE hry H'.

Ke $x^* \in X, i \in N, \xi \in X_i$ uvažujme strategii $(\xi, x_{-i}^*) := (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, \xi, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$.
Jakýkoli strategický profil $x^* \in X$ splňující $f_i(x^*) \geq f_i((\xi, x_{-i}^*))$ pro $i \in N$ splňuje i $f_1'(x^*) \geq f_1'((\xi, x_{-i}^*))$, neboť posledně jmenovaná nerovnost lze přičtením κ převést na dříve jmenovanou. Opak analogicky.

Důsledek

Při hledání NE lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\kappa = 0$:

O hrách H a H' hovoříme jako o strategicky ekvivalentních.

Dva hráči a konstantní součet – antagonistická hra

- Hra s konstantním součtem s $n = 2$ se nazývá antagonistická hra. Situaci usnadňuje absolutní protichůdnost zájmů hráčů: pokud $\kappa = 0$, pak to, co jeden vyhraje, druhý ztratí.
- Lze tedy psát $H = ((1,2),(X_1,X_2),(f_1,-f_1))$.
- Definiční nerovnosti Nashovy rovnováhy se pak zapíšou jako

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*,x_2^*) &\geq f_1(x_1,x_2^*), \\ -f_1(x_1^*,x_2^*) &\geq -f_1(x_1^*,x_2)) \Leftrightarrow f_1(x_1^*,x_2^*) \leq f_1(x_1^*,x_2), \end{aligned}$$

nebo také

$$f_1(x_1,x_2^*) \leq f_1(x_1^*,x_2^*) \leq f_1(x_1^*,x_2) \qquad \text{pro všechna } x_1 \in X_1, x_2 \in X_2.$$

Maticové hry

Konečná antagonistická hra – maticová hra

- Antagonistická hra, ve které mají oba hráči konečný počet strategií, se nazývá maticová hra. Jde o to, že výplatní funkce v takové hře se dá sledovat v matici, a taková matice pak hru plně popisuje:

$$H = ((1,2), (\{1,\dots,m_1\}, \{1,\dots,m_2\}), (f_1(i,j) = A_{ij}, f_2 = -f_1)),$$

  kde $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$. Předpokládáme tak, že strategie hráče 1 resp. 2 odpovídají řádkům resp. sloupcům matice A.
- Zřejmě, každá matice popisuje maticovou hru.
- Dvojice (k, ℓ) je NE (v ryzích strategiích) v maticové hře, pokud pro všechna $i \in X_1$ a $j \in X_2$ platí $A_{i\ell} \leq A_{k\ell} \leq A_{kj}$.
- Prvek $A_{k\ell}$ matice A splňující podmínku výše se nazývá sedlový bod; je to největší prvek ve sloupci ℓ a nejmenší prvek v řádku k.
- Problém: sedlový bod nemusí existovat.

Hledaní NE v ryzích strategiích

Idea: najít zvlášť taková (k,ℓ), že $A_{i\ell} \leq A_{k\ell}$ a zvlášť (k,ℓ) vyhovující $A_{k\ell} \leq A_{kj}$, tj. najít takové dvojice strategií, u kterých by si nemohl při odchýlení polepšit hráč 1 resp. 2.

1. Pro každou strategii ℓ hráče 2 najdeme množinu $K_\ell = \arg\max_{k \in X_1} A_{k\ell}$ strategií hráče 1, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii l hráče 2. Snadno získáme množinu K dvojic strategií $(k,\ell), k \in K_\ell, l \in X_2$, splňující $A_{i\ell} \leq A_{k\ell}$ pro všechna $i \in X_1$.
2. Pro každou strategii k hráče 1 najdeme množinu $L_k = \arg\min_{\ell \in X_2} A_{k\ell}$ strategií hráče 2, které jsou nejlepšími reakcemi na strategii k hráče 1. Snadno získáme množinu L dvojic strategií $(k,\ell), \ell \in L_k, k \in X_1$, splňující $A_{kj} \geq A_{k\ell}$ pro všechna $j \in X_2$.
3. Množina všech NE je množina všech (k,ℓ) takových, že jsou zároveň v K i v L.

Jde vlastně o vyčíslování best-response funkce. Je možné proto, že jsou prostory strategií konečné.

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & 2 \\ \overline{3} & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad K_1 = \{1, 2\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \{1, 2\}$$
$$K_2 = \{3\}$$
$$K_3 = \{1\}$$
$$K = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (1, 3)\}$$
$$L_1 = \{3\}$$
$$L_2 = \{3\}$$
$$L_3 = \{1\}$$
$$L = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$$
$$K \cap L = \{(1, 3)\}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix} \qquad K_1 = \{2\}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ \overline{4} & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \{2\} \\ K_2 &= \{1\} \\ K_3 &= \{2\} \\ K &= \{(2,1),(1,2),(2,3)\} \\ L_1 &= \{3\} \\ L_2 &= \{2\} \\ L &= \{(1,3),(2,2)\} \\ K \cap L &= \emptyset \end{aligned}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \underline{\overline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{1, 3\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{4} & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ \overline{4} & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Příklady

$$\begin{pmatrix} \overline{3} & 4 & \overline{\underline{2}} \\ \overline{3} & 2 & \underline{1} \\ \underline{0} & \overline{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \overline{4} & \underline{2} \\ \overline{4} & \underline{0} & \overline{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overline{\underline{4}} & 5 & \overline{\underline{4}} \\ \underline{3} & \overline{7} & \underline{3} \\ \underline{4} & 5 & \underline{4} \end{pmatrix}$$

$K_1 = \{1, 3\}$
$K_2 = \{2\}$
$K_3 = \{1, 3\}$
$K = \{(1, 1), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (3, 3)\}$
$L_1 = \{1, 3\}$
$L_2 = \{1, 3\}$
$L_3 = \{1, 3\}$
$L = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
$K \cap L = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$

Smíšené strategie

Smíšené strategie

Uvažujme konečnou hru v normálním tvaru $H = (N, (X_1, \dots, X_n), (f_1, \dots, f_n))$.

Koncept NE v ryzích strategiích je slabý – existují hry, pro které NE neexistují.

Připusťme, že se hráči mohou své strategie vybírat náhodně podle zvoleného pravděpodobnostního rozdělení, jejich výplatní funkce pak budou očekávané hodnoty výplat, tedy

- prostor strategií i-tého hráče pak má podobu $X_i^s = \{(x_i^1, \dots, x_i^{m_i})^\mathrm{T} : \sum_{k \in X_i} x_i^k = 1, x_i \geq 0\}$, a
- výplatní funkce i-tého hráče je

$$f_i^s = \sum_{k_1 \in X_1} \cdots \sum_{k_n \in X_n} f_i(x_1^{k_1}, \dots, x_n^{k_n}) \prod_{j \in N} x_j^{k_j}$$

Smíšené rozšíření konečné hry

Definice

Smíšené rozšíření konečné hry $H = (N, (X_1, \dots, X_n), (f_1, \dots, f_n))$ je hra $H^s = (N, (X_1^s, \dots, X_n^s), (f_1^s, \dots, f_n^s))$.

Věta

Každá konečná hra má NE ve svém smíšeném rozšíření.

Smíšené rozšíření maticové hry

Pro maticovou hru lze výplatní funkce smíšeného rozšíření zapsat jednodušeji:

$$f_i^s = \sum_{k \in X_1} \sum_{\ell \in X_2} x_1^k x_2^\ell a_{k\ell} = x_1^{T\,s} A x_2^s$$

Jde o to, že kombinace strategií (k, ℓ) bude vybrána s pravděpodobností $p = x_1^k x_2^\ell$.

NE ve smíšeném rozšíření maticové hry

- Prostory strategií nejsou konečné, nelze zkoušet všechny možnosti.
- Nechť je v je výhra hráče 1.
- Hráč 2 se snaží chovat tak, aby v bylo minimální, pojďme najít x_2^{*s} a v tak, aby, ať hráč 1 udělá cokoli, ztratil hráč 2 vždy nejvýše v.
- Nelineární program níže vlevo zřejmě hledá požadované strategie x_2^s a minimální možné v.
- Linearizace vpravo. Proč je množina optimálních řešení stejná? Nerovnost ${x_1^s}^{\mathsf{T}} A x_2^s \leq v$ lze pro každé $x_1^s \in X_1^s$ vytvořit jako konvexní kombinaci m_1 nerovností ve tvaru $Ax_2^s \leq v\mathbf{1}$. Speciálně lze vytvořit i i tu nerovnost, jejíž levá strana je maximální.

$$
\begin{aligned}
\min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\
\max_{x_1^s \in X_1^s} {x_1^s}^{\mathsf{T}} A x_2^s &\leq v \\
x_2^s &\geq 0 \\
1^{\mathsf{T}} x_2^s &= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\
A x_2^s &\leq v\mathbf{1} \\
x_2^s &\geq 0 \\
1^{\mathsf{T}} x_2^s &= 1
\end{aligned}
$$

Viditelně duální programy

Podobný lineární program lze sestavit i pro výpočet x_1^*. Tedy

$$\begin{aligned} \min_{x_2^s \in \mathbb{R}^{m_2}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ Ax_2^s &\leq v\mathbf{1} \\ x_2^s &\geq 0 \\ \mathbf{1}^\mathsf{T} x_2^s &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max_{x_1^s \in \mathbb{R}^{m_1}, v \in \mathbb{R}} \quad & v \\ A^\mathsf{T} x_1^s &\geq v\mathbf{1} \\ x_1^s &\geq 0 \\ \mathbf{1}^\mathsf{T} x_1^s &= 1 \end{aligned}$$

Je-li zaručeno, že $v > 0$ (viz převody na nulový součet), lze zavést substituci $p = x_1^s / v$ a $q = x_2^s / v$. Po pár úpravách pak:

$$\begin{aligned} \max_{q \in \mathbb{R}^{m_2}} \quad & 1^\mathsf{T} q \\ Aq &\leq 1 \\ q &\geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min_{p \in \mathbb{R}^{m_1}} \quad & 1^\mathsf{T} p \\ A^\mathsf{T} p &\geq 1 \\ p &\geq 0 \end{aligned}$$

Tyto programy jsou zřejmě duální, při použití vhodného algoritmu stačí řešit jeden z nich (řešení druhého: stínové ceny). Méně očividné: horní programy jsou též duální.

Příklad

Maticová hra pro dva hráče je dána následující maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Rozhodněte, zda má tato hra sedlový bod.
- Najděte NE.

(Bonusové) otázky k vlastnostem NE v maticových hrách

Unikátnost výplaty

- Víme, že NE nemusí být unikátní ani v případě, že připouštíme pouze ryzí strategie. Jak je to ale s hodnotou výplaty? Můžou existovat dvě různá NE (k_1, ℓ_1) a (k_2, ℓ_2) taková, že zároveň $f_1(k_1, \ell_1) \neq f_1(k_2, \ell_2)$?
- A jak je to v případě smíšeného rozšíření – mohou existovat ekvilibria s různými hodnotami výplatních funkcí tam?

Identifikace nejednoznačnosti

- V ryzích strategiích je jasné, kdy existuje více NE. Jak to poznat ve smíšeném rozšíření?
- Jak popsat množinu všech NE ve smíšeném rozšíření? Jak může být složitá?

Metoda fiktivní hry

Metoda fiktivní hry

- iterační metoda pro odhad NE v konečných hrách
- výhoda: jednoduchost
- nevýhoda: nemusí konvergovat
- myšlenka:
  - předpokládá se, že se hra donekonečna opakuje
  - každý hráč, řekněmě hráč i, předpokládá, že hraje proti hráčům, kteří hrají stále stejné (smíšené) strategie
  - v j-tém opakování hry se tyto smíšené strategie odhadují napozorovanými relativními četnostmi jednotlivých ryzích strategií v předchozích $j-1$ hrách
  - strategie hráče i v j-tém opakování hry je optimální reakce na odhadované smíšené strategie.
- konvergence pro:
  - konečné antagonistické hry
  - hry řešitelné vyškrtáním dominovaných strategií
  - aj.

Bonusová hra – o dělitelné zakázky

- Situace:
  - 2 hráči soupeří o ℓ zakázek velikosti $s_1, \ldots, s_\ell$.
  - Soupeření má formu lobbingu: hráč 1 má k dispozici a prostředků na lobbing, hráč 2 disponuje prostředky o velikosti b.
  - Hráči své disponibilní prostředky beze zbytku rozdělí mezi jednotivé zakázky; každý hráč přidělí každé zakázce alespoň nějaké prostředky.
  - Pokud hráč 1 lobuje pro zakázku 1 a_1 prostředky a hráč 2 b_1 prostředky, získá hráč 1 část zakázky 1 o velikosti $s_1 a_1/(a_1 + b_1)$.
- Výplatní funkce a prostory strategií formálně:

  $X_1 = \{(a_1, \ldots, a_\ell) : a_i > 0, \sum_{j=1}^{\ell} a_i = a\}$,

  $X_2 = \{(b_1, \ldots, b_\ell) : b_i > 0, \sum_{j=1}^{\ell} b_i = b\}$,

  $f_1 = \sum_{j=1}^{l} \frac{s_j a_j}{a_j + b_j}$, $f_2 = \sum_{j=1}^{l} \frac{s_j b_j}{a_j + b_j}$.
- Cíl:
  - Jaké je ve hře NE?