

# 4EK421 Teorie her a ekonomické rozhodování

Hry v rozvinutém tvaru

---

MIROSLAV RADA

15. října 2024

Vysoká škola ekonomická v Praze

## Hra v rozvinutém tvaru – příběh

- Mějme hru s řadou po sobě jdoucích rozhodnutí.
- Hra se v každém okamžiku nachází v nějakém **stavu**. Stav je určen počátečním modelem hry a předcházejícími rozhodnutími. Poté, co je přijato nějaké rozhodnutí, se stav hry může změnit. Stavů jsou **rozhodovací** nebo **pravděpodobnostní**.
- V každém rozhodovacím stavu se rozhoduje právě jeden hráč, který vybírá některý ze spočetně mnoha dalších stavů.
- Příklad: šachy, jiné hry apod.
- Pravděpodobnosti přechodů v pravděpodobnostních stavech jsou předem určené.

Můžeme zobecnit: simultánní rozhodování, nespočetně možností...

## Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *Battle of Sexes* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Připomeňme, že ve hře jsou dvě NE v ryzích strategiích, ani jedno nedominuje to druhé.

## Příklad – sekvenční manželský spor

Uvažujme bimaticovou hru typu *Battle of Sexes* s výplatní maticí

$$\begin{pmatrix} 1,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,1 \end{pmatrix},$$

kde první strategie obou hráčů znamenají volbu „Bach“ a druhé volbu „Strawinský“.

Připomeňme, že ve hře jsou dvě NE v ryzích strategiích, ani jedno nedominuje to druhé.

### Modifikace

Řekněme, že jeden z manželů odchází z práce dřív a koupí lístek dle vlastního výběru. Druhý se buď přidá, nebo si koupí vlastní lístek na druhý koncert.

- Jak se mají hráči chovat, pokud se bude rozhodovat dříve řádkový hráč?
- A co v případě sloupcového hráče?

## Piškvorky 3 × 3

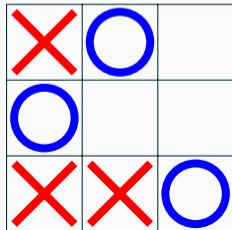
- Mějme piškvorky v mřížce 3 × 3. Velikost políčka je 1cm × 1cm.
- Hráči střídavě umísťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka (velikost značky libovolná).
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

## Piškvorky 3 × 3

- Mějme piškvorky v mřížce 3 × 3. Velikost políčka je 1cm × 1cm.
- Hráči střídavě umisťují své značky do mřížky. V každém políčku mřížky nejvýše jedna značka.
- Vyhrává ten, kdo jako první umístí tři značky tak, aby jejich středy ležely v přímce; pokud se mřížka zaplní bez toho, aby některý z hráčů vyhrál, hra končí remízou.

### Otázky:

- Odvodme nějakou horní mez počtu stavů, do kterých se hra může dostat.
- Sestavme graf podhry, nacházející se ve stavu níže (modrý na tahu).



# Jaké otázky si klást?

- Jaké otázky si klást?
- Jak hra dopadne?
  - Jaké budou výplaty hráčů?
  - Jakými strategiemi se výplat dosáhne?
- Co je zde vlastně strategie?
- Jak by hra dopadla, pokud by byla v jiném stavu než počátečním?
  - Dokonalá rovnováha podhry!
- Jak těžké je spočítat odpovědi na předchozí otázky?
  - Jak velký je explicitní popis hry?
- Je-li zadán stav, jakou posloupností stavů se do něj hra dostala?
  - Retrogradní analýza!

## Model hry v rozvinutém tvaru – poznámky a způsob řešení

- Graf je typicky strom (tj. souvislý acyklický).
- Graf může být složitý, ale dá se zestromovatět (na nekonečnou výšku nebo šířku).
- Informace, co přesně znamenají jednotlivá rozhodnutí, v modelu obecně být nemusí. Pokud dvě různá rozhodnutí vedou do stejného stavu, model to nemusí rozlišovat.

Způsob řešení u acyklického grafu s nezávislými rozhodnutími hráčů:

- Každému stavu pro každého hráče přiřadit celkovou výplatu, kterou hráč získá, pokud se hra do daného stavu dostane.
- Odspodu: v listech jsou výplaty jasné. Vedou-li z nějakého stavu hrany jen do už vyhodnocených uzlů, lze vybrat nejlepší rozhodnutí pro hráče, který se právě rozhoduje.

# Otrávená čokoláda

## Situace:

- je dána tabulka čokolády o rozměru  $m \times n$ ,  $\max\{m, n\} > 1$ , tvořená čtvercovými dílky
- dílek na pozici  $(1, 1)$  je otrávený
- hráči čokoládu postupně ujídají
- kdo sní otrávený dílek, prohrál
- hráč, který je na tahu, vybere nesnědřený dílek  $(i, j)$  a sní vše, co ještě není snědené, v obdélníku  $(i, j), (i, n), (m, j), (m, n)$

Hru je možné hrát na <http://hry.polyedr.cz/chocolate>.

## Úkoly.

- Uvažujme hru s  $m = n > 1$ . Popišme vyhrávající strategii pro hráče, který začíná.
- Dokažme, že (obecně) existuje vyhrávající strategie pro hráče, který začíná.
- Ukažme, že počet stavů, do kterých se hra může dostat, je exponenciálně velký v  $\Omega(\min\{m, n\})$  (tj. že vyhrávající strategii není únosné hledat hrubou silou;  $\Omega(x)$  znamená funkci větší než nějaká lineární funkce  $x$ ).

# Příklad – pistolníci

## Situace:

- Tři pistolníci jsou v souboji.
- Pokud jsou na řadě se střelbou, trefí vybraného soupeře se s pravděpodobnostmi  $p_1 = 1/3, p_2 = 1/2, p_3 = 1$ .
- Mohou střílet buď na soupeře podle vlastního výběru, nebo do vzduchu ( $p = 1$ ).
- Pokud je některý pistolník zasažen, dál se neúčastní.
- První střílí 1, pak 2, účastní-li se ještě, pak 3 účastní-li se ještě, pak 1, účastní-li se ještě, atd.

**Cíl:** maximalizovat pravděpodobnost, že v souboji zůstane jako poslední.

**Otázky:** na koho má střílet první pistolník? Jaká je pravděpodobnost jeho výhry?

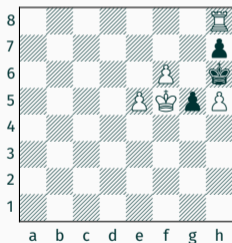
**Zjednodušující předpoklady:** (dokažte, že se dají vyvodit z pravidel výše!)

- pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3,
- pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2,
- pokud jsou naživu již jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.

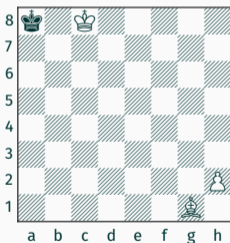
# Retrográdní analýza – příklady

Pozice níže byly dosaženy posloupnostmi přípustných tahů. Bílý je vždy na tahu. Vyřešte jednotlivé úlohy!

Mat druhým tahem.



Jaký byl poslední tah bílého?



Určete, zda bílý smí rošovat.

