Teorie her

Úvodní cvičení, různé hry

Miroslav Rada

17. 9. 2024

Zmrzlinář

Situace:

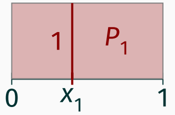
- zmrzlinář uvažuje, kam na pláži dlouhé 1 km umístit stánek; pláž má tvar úsečky
- poptávka po zmrzlině v jednotlivých bodech pláže je funkcí vzdálenosti od stánku
- cíl zmrzlináře: umístit stánek, aby úhrn poptávek přes všechny body byl maximální

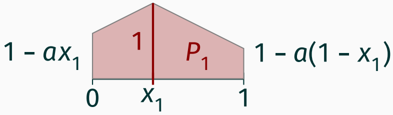
Varianta K: konstantní poptávka

- poptávka je nezávislá na vzdálenosti od stánku, např. o velikosti 1

Varianta L: lineárně klesající poptávka

- nechť x_1 je vzdálenost zmrzlináře od začátku pláže, pak poptávka v místě x od začátku pláže je dána předpisem $p(x) = \max\{0, 1 - a(|x - x_1|)\}$ pro $a > 0$.





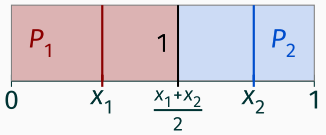
Hra 1: zmrzlináři

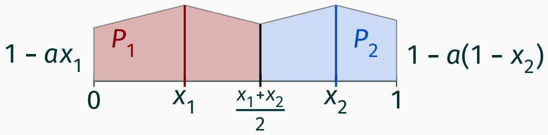
Situace:

- uvažujme nyní m **zmrzlinářů**
- řekněme, že poptávka se realizuje u zmrzlináře, který má stánek blíže; jsou-li oba stejně daleko, rozdělí se na polovinu
- uvažujme oba předchozí případy, tj. jak konstantní poptávku, tak lineárně klesající poptávku

Cíl:

- najít pozici **optimální** pozici zmrzlinářů





Hra 1: různé varianty

Varianta K s $m = 2$

- oba zmrzlináři uprostřed pláže!

Hra 1: různé varianty

Varianta K s $m = 2$

- oba zmrzlináři uprostřed pláže!

Varianta K s $m = 3$

- optimální chování neexistuje

Hra 1: různé varianty

Varianta K s $m = 2$

- oba zmrzlináři uprostřed pláže!

Varianta K s $m = 3$

- optimální chování neexistuje

Varianta K s $m > 3$

- 1. sada úkolů

Varianta L v závislosti na a a m

- 1. sada úkolů

Hra vs. rozhodovací problém

Příklad

4 osoby si objednávají v restauraci. Pokud:

- každý si platí sám ⇒ rozhodovací problém
- každý platí čtvrtinu účtu ⇒ hra

- **Hra**
  - více rozhodovatelů současně
  - individuální výsledek může být závislý na akcích ostatních
- **Teorie her**
  - disciplína studující chování rozhodovatelů v konfliktních situacích pomocí matematického modelování

Hra 2: dvě třetiny průměru

Situace:

- každý hráč vybírá číslo z intervalu $[0, 100]$
- vyhrává každý hráč, který je nejblíže $\frac{2}{3}$ průměru všech vybraných čísel

Preference (lexikograficky):

- být nejblíže 2/3 průměru,
- minimalizovat počet výherců.

Cíl:

- jaké číslo je optimální vybrat?
- pojďme hru hrát na `https://hry.polyedr.cz/prumer`

Hra 3: Piráti

Situace:

- n racionálních pirátů najde poklad sestávající z m mincí
- dělení probíhá následovně:
  - od nejstaršího po nejmladšího se vznáší návrhy na rozdělení,
  - o každém návrhu se ihned hlasuje, pokud je některý přijat, další návrhy se nevznáší,
  - nutná nadpoloviční většina hlasů,
  - pokud návrh není přijat, navrhující pirát je eliminován.

Preference (lexikograficky):

- maximalizace vlastního zisku,
- zachování vlastního života,
- maximalizace uzmutých cizích životů, a
- maximalizace spokojenosti starších pirátů (20,0,80,0,0 lepší než 20,0,0,0,80).

Cíl:

- optimální návrhy a chování při hlasování pro $n = 5$ a $m = 100$.
- řešení možno ověřit na `https://hry.polyedr.cz/pirati`

Prvky hry a klasifikace her

Hráči

- počet hráčů: 2 hráči / více hráčů
- možnosti kooperace: žádná / omezená / volná tvorba koalic
- přítomnost náhodného mechanismu
- informace: úplná / neúplná

Strategie

- velikost prostoru strategií: konečný / nekonečný
- spojitost prostoru strategií: spojitý / nespojitý

Výplatní funkce

- konstatní součet (antagonistická hra) / nekonstantní součet
- kooperace: přenosná / nepřenosná výhra

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n$.

Trojice (N, X, f) je **hra v normálním tvaru**.

Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru

$N = (1, 2)$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n$.

Trojice (N, X, f) je **hra v normálním tvaru**.

Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru

$N = (1, 2)$, $X = ([0, 1], [0, 1])$, $f = (f_1, f_2)$,

Hra v normálním tvaru

Mějme:

- seznam hráčů $N \coloneqq (1, \dots, n)$,
- seznam prostorů strategií $(X_1, \dots, X_n)$
- seznam výplatních funkcí $f = (f_1, \dots, f_n)$, kde
  - pro $i \in [n]$ je $f_i : X_1 \times \cdots \times X_n \mapsto \mathbb{R}$,
  - $X \coloneqq X_1 \times \cdots \times X_n$.

Trojice (N, X, f) je **hra v normálním tvaru**.

Příklad – Hra 1 ve variantě L zapsaná v normálním tvaru

$N = (1, 2)$, $X = ([0, 1], [0, 1])$, $f = (f_1, f_2)$,

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + x_2)/2 & \text{pokud } x_1 < x_2, \\ 0.5 & \text{pokud } x_1 = x_2, \\ 1 - (x_1 + x_2)/2 & \text{jinak;} \end{cases} \qquad f_2 \text{ analogicky.}$$

Hra v rozvinutém tvaru

- u hry v **normálním tvaru** se předpokládá, že rozhodnutí probíhají **simultánně**
- u hry v **rozvinutém tvaru** je rozhodování **sekvenční** (př. šachy, většina tahových her)
- obvyklou reprezentací je strom, kde každé větvení odpovídá jednomu rozhodnutí
- uzly – stavy, hrany – zvolené strategie

- pokud pozdější rozhodnutí nejsou ovlivňována dřívějšími, lze řešit zpětnou indukcí
- v některých případech lze převést na hru v normálním tvaru („rozbalit“ strom)
- uzly mohou být samy o sobě hrou se simultánním rozhodováním

Hra ve tvaru charakteristické funkce

- pro kooperativní hry (s přenosnou výhrou)
- idea – zkoumat kooperaci formou hry normálním tvaru je výpočetně náročné, pojďme to usnadnit a říct, jaká bude výplata jednotlivých koalic

Hra ve tvaru charakteristické funkce je dvojice $(N, \varphi : 2^N \mapsto \mathbb{R})$.

- N je množina hráčů, φ funkce, které každé podmnožině N přiřazuje výhru
- je možné klást otázky typu **Může koalice $K \subseteq N$ vzhledem k velikosti své výplaty vzniknout?** nebo **Jak se v rámci koalice K má rozdělit zisk, pokud tato koalice vznikne?**

Co považovat za řešení?

- typicky – chceme nějaké strategie, které budou v nějakém smyslu nejlepší
- pro hru v normálním tvaru (z normativního pohledu) – Nashovo equilibrium (Nashovo rovnovážné řešení)

Nashovo equilibrium

Nashovo equilibrium je taková kombinace strategií, tzv. **strategický profil**, $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$, že pro každého hráče, řekněme i-tého, platí, že pro všechna $x_i \in X_i$ je

$$f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \geq f_i(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*).$$

- neformálně, Nashovo equilibrium je takový strategický profil, že žádný hráč nemá motivaci svou strategii změnit
- strategický profil $(x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*)$ budeme značit (x_i, x_{-i}^*)

Best-response funkce

Podle definice Nashova ekvilibria je x^* ekvilibriem tehdy, pokud pro všechna i platí

$$f_i(x^*) = \max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x^*_{-i}).$$

Pojďme se zabývat tím, jak musí vypadat x_i^* v závislosti na x_{-i}. Definujme tzv. **best-response funkci** i-tého hráče, značenou g_i. Zřejmě $g_i : X_{-i} \to 2^{X_i}$:

$$g_i(x_{-i}) \coloneqq \{x_i \in X_i \,:\, f_i(x_i) = \max_{\xi_i} f_i(\xi_i, x_i)\}.$$

Pak, x^* je Nashovo ekvilibrium, pokud $x_i^* \in g_i(x_{-i})$ pro všechna $i \in N$.

Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**

Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje

Hra 4: kámen–nůžky–papír (KNP)

Situace:

- dva hráči spolu (jedenkrát) hrají standardní hru KNP

Cíl:

- navrhnout **optimální** chování hráčů

Výsledek:

- závisí na definici **chování hráčů** a **optimality**
- pokud chování je **volba konkrétního symbolu**, optimální chování neexistuje
- pokud chování je **pravděpodobnostní rozdělení nad symboly**, optimální chování existuje

Hra 5: hra o nejvyšší číslo

Situace:

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

Cíl:

- má hra Nashovo ekvilibrium?

Hra 5: hra o nejvyšší číslo

Situace:

- hrají dva hráči, každý napíše tajně na papírek přirozené číslo
- papírky si ukážou, vyhrává ten, který napsal vyšší číslo

Cíl:

- má hra Nashovo ekvilibrium?
- pokud ne, nepomohlo by změnit pojetí **chování**?

Bonusové otázky k zamyšlení – I

- Již víme, že u hry 2/3 průměru (Hra 3) je optimální strategie $(0, \dots, 0)$. Připouštěli jsme, že tipy hráčů mohou být reálná čísla z intervalu $[0, 100]$. Změní se něco, když se omezíme na celá čísla z intervalu $[0, 100]$?
  Poznamenejme, že optimální strategií rozumíme Nashovo ekvilibrium, tj. takovou kombinaci strategií, že žádný z hráčů nemá motivaci svou strategii změnit.
- Závisí nějak případná existence dalších ekvilibrií na počtu hráčů?

Bonusové otázky k zamyšlení – II

Uvažujme znovu zmrzlináře (Hra 1). Víme, že je-li poptávka po zmrzlině konstantní (nezávislá na vzdálenosti k nejbližšímu stánku), je pro dva zmrzlináře ekvilibriem, stoupnou-li si doprostřed pláže.

- Jak to bude v případě konstantní poptávky pro 3 nebo více zmrzlinářů? Existuje nějaké Nashovo ekvilibrium?
- Řekněme, že je poptávka po zmrzlině závislá na vzdálenosti k nejbližšímu stánku. Konkrétně, stojí-li zmrzlináři na pozicích x_1 a x_2, je poptávka v bodě x rovna $\max\{0, 1 - a \min\{|x - x_1|, |x - x_2|\}\}$. Stejně jako u hry 1 se poptávka realizuje u toho zmrzlináře, který stojí blíže. Najděte optimální pozici zmrzlinářů pro $a = 2$, případně parametricky pro obecné $a > 0$.
- Bude tentokrát ekvilibrium existovat pro více zmrzlinářů než 2? Proč?