4EK421 – zadání úkolů
bimaticové hry, rozvinutý tvar, koaliční hry

Zpracovávání, odevzdání a hodnocení. Součástí odevzdaných úkolů musí být i komentář, zejména by mělo být patrné, jak bylo řešení dosaženo, proč byly provedeny kroky, které byly provedeny, apod.

Úkol se odevzdává do příslušné odevzdávárny v InSIS. Odevzdáte-li úkol v dostatečném předstihu, nejpozději 48 hodin před uzavřením odevzdávárny, úkol okomentuji a vrátím k doplnění. Tímto způsobem úkol půjde odevzdávat i po částech. **Prosím, neposílejte mi úkoly emailem.** Raději odevzdejte větší dávku a pak počkejte na vrácení úkolu.

Rozumný počet bodů, které by měl za tuto sadu úloh získat student, který chce ze cvičení získat 50 bodů, je 23. Za nejsnáze dostupné body považuji body z úloh 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13. Poměrně snadno se dají získat i body za úlohy 9 a 10. Ani ostatní úlohy nejsou nijak zvlášť těžké, nejhůře uchopitelná je zřejmě úloha 14.

Personalizace zadání. Žádá-li zadání úkolu, abyste si jej personalizovali podle data narození, lze použít vlastní datum narození nebo datum zvolit náhodně. V případě náhodné volby nicméně očekávám, že distribuce, ze které se bude náhodné datum generovat, budou *rozumné*, například že distribuce jednotlivých studentů budou po dvojicích nezávislé a že support distribuce bude pokrývat období několika let okolo Vašeho data narození. Máte-li pochybnosti o tom, zda je Vaše distribuce rozumná, nejspíš rozumná není.

Bimaticové hry

Užívejme konvenci, že je-li bimaticová hra reprezentovaná dvojicí matic, odpovídá první z matic výplatám hráče, který vybírá řádkové strategie.

Uvažujte následující hru: Dvě firmy bojují o zakázky v hodnotách Z_1, Z_2 a Z_3. Hodnoty zakázek personalizujte podle data narození:

- $Z_1 = 60 + R$, kde za R dosaďte rok narození zmenšený o 1900.
- $Z_2 = 40 + 2 \cdot M$, kde za M dosaďte pořadové číslo měsíce narození v roce,
- $Z_3 = 40 + D$, kde za D dosaďte den narození v měsíci.

O zakázky se bojuje lobováním: každá firma přiřadí každé zakázce objem peněžních jednotek, kterými za získání dané zakázky lobuje. Firma 1 má na lobování dvě peněžní jednotky, firma 2 pouze jednu jednotku. Lobovat je možné pouze v celých penežních jednotkách. Firmy do lobování alokuji veškeré prostředky, které mají k dispozici.

Firma zakázku získá tehdy, kdy pro ni lobuje alespoň jednou peněžní jednotkou a zároveň pro ni lobuje více jednotkami než konkurence. Pokud pro některou zakázku lobují obě firmy stejným nenulovým počtem peněžních jednotek, získá každá firma polovinu objemu dané zakázky.

Cílem obou firem je maximalizovat objem zakázek.

Úloha 1: Sestavení bimaticové hry. [2 body]
Sestavte na základě výše uvedeného popisu dvojici matic popisující výplaty ve zmíněné hře. Rozhodněte, zda má hra ekvilibrium. Pokud ano, uveďte, jaká všechna ekvilibria jsou, a jaké výplatí funkce jim přísluší. Pokud ne, zdůvodněte, na základě čeho jste vyvodili, že hra ekvilibrium nemá.

Úloha 2: Nalezení ekvilibria ve smíšeném rozšíření. [3 body]
Uvažujte smíšené rozšíření hry. Najděte alespoň jedno ekvilibrium pomocí bilineárního programu ze cvičení.

Uveďte postup. Výsledky interpretujte. Zejména uveďte, jaký konkrétní strategický profil (dvojice pravděpodobnostních rozdělení) je ekvilibriem. Uveďte také, jaké budou výplaty pro Vámi spočtené ekvilibrium.

Úloha 3: Ekvilibria jako návod k jednání [5 bodů]
Použijte některý z dostupných nástrojů pro nalezení všech ekvilibrií ve smíšeném rozšíření bimaticové hry (např. online solver https://cgi.csc.liv.ac.uk/~rahul/bimatrix_solver/).

Uveďte všechna ekvilibria, která hra odvozená od Vašich hodnot zakázek má. Poskytuje koncept Nashova ekvilibria návod k jednání hráčů *ve smíšeném rozšíření hry*? Zdůvodněte.

Dále:

1. pokud koncept Nashova ekvilibria neposkytoval pro Vaši hru návod k jednání, najděte takové hodnoty Z_1, Z_2, Z_3, aby koncept Nashova ekvilibria návod k jednání poskytoval. Svou volbu zdůvodněte a popište postup, jak jste se k hodnotám dostali, nebo
2. pokud koncept Nashova ekvilibria pro Vaši hru návod k jednání poskytoval, navrhněte takové hodnoty Z_1, Z_2, Z_3, aby ve hře ekvilibrií bylo více a žádné z nich nedominovalo všechna ostatní. I v tomto případě uveďte, jak jste postupovali a proč.

Pro připomenutí, existuje-li ve hře více ekvilibrií, z nichž žádné nepřináší jednotlivým hráčům alespoň takovou výplatu, jako ostatní ekvilibria, nelze žádné z těchto ekvilibrií označit za návod k jednání. Speciálně, dominuje-li jedno z ekvilibrií všechna ostatní ekvilibria, je návodem k jednání.

Kooperace v bimaticové hře

Úloha 4: Výpočet charakteristické funkce [3 body]
Předpokládejte, že hráči za žádných okolností nebudou hrát dominované strategie. Strategie, které nejsou dominované a se kterými budete pracovat, označte.

Předpokládejte, že je v bimaticové hře z úlohy 1 povolená kooperace. Spočtěte hodnoty charakteristické funkce vyjadřující výplaty jednotlivých koalic, které mohou vzniknout. Za účelem výpočtu výplaty koalic vyslovte vhodné předpoklady o chování hráčů, kteří nejsou členy koalice: konkrétně, charakteristickou funkci spočítejte alespoň ve dvou variantách (viz slidy), jedna z nich však musí být minimaxová charakteristická funkce.

Úloha 5: Kooperace s přenosnou výhrou [2 body]
Uvažujte nyní, že hráči bimaticovou hru z úlohy 1 hrají kooperativně s přenosnou výhrou a že výplaty jednotlivých koalic jde zachytit pomocí minimaxové charakteristické funkce spočtené v úloze 4.

1. Popište, jak vypadá *jádro hry* (tj. množina rozdělení, která jsou racionální pro všechny koalice) a zda je pro hráče výhodné kooperovat.
2. Pokud je pro hráče kooperace výhodná, navrhněte nějaké vhodné dělení celkové výhry, které považujete za spravedlivé. Lze použít i některý ze způsobů ve slidech. Svou volbu zdůvodněte.

Úloha 6: Vlastnosti dělení výher navržených ve slidech [2×3 body]
Uvažujte zcela obecnou kooperativní hru dvou hráčů ve tvaru charakteristické funkce popsanou čtveřicí výplat $v(\{1,2\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\emptyset) := 0$.

Na slidu 16 ve slidech jsou navržena dělení výhry v poměru hodnot charakteristických funkcí (odrážka 2) a dělení výhry v poměru přínosů (odrážka 3). Charakterizujte co nejlépe, pro jaké hodnoty $v_{\{1,2\}}, v_{\{1\}}, v_{\{2\}}$ patří takto navržená dělení do jádra hry.

Charakterizace musí být, podobně jako řešení všech ostatních úloh, obhájená.

Úloha 7: Kooperace s nepřenosnou výhrou. [3 bodů]
Uvažujte opět bimaticovou hru z úlohy 1 a minimaxovou charakteristickou funkci spočtenou v úloze 4. Předpokládejte nyní, že výhra hráčů není přenosná.

- Určete množinu nedominovaných dosažitelných dvojic výplat, dále značenou D_n.
- V případě, že $|D_n| > 1$, tj. že nedominovaných dosažitelných dvojic výplat bude více, zvolte nějaký způsob, jak z nich vybrat dělení, které bude v nějakém smyslu spravedlivé (inspirace viz slidy o bimaticových hrách, můžete pochopitelně použít i některý ze způsobů přímo na slidech uvedený).

Hry v rozvinutém tvaru

Úloha 8: Test [5 bodů]
Situace. Student píše test. Protože není dobře připraven, řeší otázku, zda opisovat, či nikoli.

Pokud student opisovat bude, může nastat následující:

- Dozor studenta odhalí a potrestá; to nastane s pravděpodobností 2/5.

- Dozor opisování vůbec nezaregistruje; to nastane s pravděpodobností 1/10.
- Dozor pojme podezření, že student opisuje, a zaměří naň svou pozornost; to nastane v ostatních případech.

V případě podezření na opisování má dozor dvě možnosti: buď studenta napomene, nebo ho bude pouze sledovat a vysílat k němu významné pohledy; student tedy vždy ví, že dozor podezření pojal.

Student má v případě, že je podezřelý, dvě možnosti: buď bude pokračovat v opisování, nebo s opisováním přestane a bude lovit poznatky z paměti. Pokračuje-li v opisování, bude odhalen a potrestán s pravděpodobností 0,65, s pravděpodobností 0,35 si dozor ničeho dalšího nevšimne.

Hodnoty užitku a další předpoklady. Student i dozor jsou racionální a znalí teorie her. Cílem každého z nich je maximalizovat střední hodnotu svého užitku. Hodnoty užitku se stanoví podle následujících pravidel:

- Pokud je student odhalen a potrestán za opisování, má nezávisle na ostatních okolnostech užitek 0.
- Pokud student neopisuje nebo není odhalen, je jeho užitek součtem počtu bodů, které získá za test, a případných modifikací.
- Neopisuje-li student vůbec, získá za test 6 bodů.
- Student, který opíše celý test, za něj získá 15 bodů.
- Pokud student opíše část testu a poté, co dozor pojme podezření, opisovat přestane, získá za test 8 bodů.
- Pokud je student dozorem veřejně napomínán, cítí se hloupě a hodnota jeho užitku se sníží o 5.
- Základní užitek dozoru je 10.
- Pokud dozor potrestá studenta bez napomenutí, vyvolá to negativní ohlas u studentů, kteří začnou mít pochybnosti, zda byla akce nutná, a dozor proto získá užitek 5, *nezávisle na ostatních okolnostech.*
- Pokud dozor pojme podezření, má ze své činnosti špatný pocit a hodnota jeho užitku se sníží o 2.
- Pokud dozor napomíná studenta, cítí se podobně nepříjemně jako on, protože sděluje pouze podezření a potenciálně napomíná poctivého, a jeho užitek se sníží o (další) 3.
- Pokud dozor potrestá studenta po napomenutí, zbaví se pochybností i špatného pocitu a jeho užitek bude 10, *nezávisle na ostatních okolnostech.*

Zjistěte, jak se budou aktéři dění chovat, a jak by se chovali v jednotlivých dílčích situacích, do kterých by se hra mohla dostat. Jaké budou střední hodnoty užitku pro jednotlivé strategie?

Úloha 9: Počet stavů v piškvorkách 3×3. [3×3 body]

Spočítejte, kolik různých stavů může nastat ve hře na slidu 4 ve slidech o hrách v rozvinutém tvaru. **V následujících úlohách předpokládejte, že se hra nachází ve stavu, kdy je hrací pole zcela prázdné, tj. stav hry zobrazený na slidu ignorujte.** V návaznosti na diskuzi na cvičení rozlišujte následující pojetí *stavu* hry.

- Stav hry je charakterizován posloupností odehraných tahů, každý tah znamená umístění křížku nebo kolečka na konkrétní pozici na plán. Počet stavů hry je počet vrcholů úplného stromu hry bez redukcí za symetrie nebo shodné konfigurace křížků a koleček.
- Stav hry je charakterizován pozicí značek na hracím plánu bez zohlednění symetrií pozic. Počet stavů hry je tak počet možných konfigurací křížků a koleček bez redukcí za symetrie.
- Stav hry je charakterizován pozicí značek na hracím plánu se zohledněním symetrií a rotací hracího plánu. Počet stavů hry je tak počet konfigurací křížků a koleček, které nabízí rozdílné možnosti z pohledu možného výsledku hry.

Za těsnou horní mez pro každé z pojetí výše lze získat 3 body. Za méně těsné meze lze získat méně bodů. Za triviální horní meze žádné body nebudou.

Úloha 10: Počet stavů ve hře Otrávená čokoláda. [3 body]

Dokažte, že hra Otrávená čokoláda (slide 7 slidů o hrách v rozvinutém tvaru) se může dostat do počtu stavů exponenciálního v menším z rozměrů čokolády.

K tomu stačí ukázat, že takové stavy lze zkonstruovat. Zamyslete se nad tím, jak stavy vhodně kódovat, aby byla konstrukce snadná.

Úloha 11: Piráti [max. 7 bodů]

Na prvním a druhém cvičení jsme se bavili o hře Piráti (viz slide 6 úvodních slidů). Ukázalo se, že případy, kdy počet pirátů (n) v nepřirozeném vztahu k počtu mincí (m), mají zajímavou strukturu optimálního chování: např. pro $m = 0$ piráti odhlasují nabídku $(0, \dots, 0)$ tehdy, pokud počet pirátů bude $n = 2^k - 1$ pro libovolné přirozené $k \geq 1$; pro ostatní n neexistuje nabídka nejstaršího piráta, kterou by pro nadpoloviční většinu pirátů bylo racionální přijmout.

Popište obecně, jak vypadá nejlepší nabídka nejstaršího piráta pro jednotlivé kombinace n a m. Zdůvodněte, proč je nabídka nejlepší, případně proč pro danou kombinaci n a m žádná odhlasovatelná nabídka neexistuje.

Úloha 12: Pistolníci [4 body]

Uvažujte hru Pistolníci (viz slide 8 slidů o hrách v rozvinutém tvaru). Předpokládejte, že kromě cíle „maximalizuj pravděpodobnost, že ve hře zůstaneš poslední“ mají pistolníci ještě cíl „ukonči hru co nejdříve“. Druhý cíl se použije pouze v případě, že varianty jsou podle prvního cíle stejně dobré.

Na konci slide jsou vysloveny zjednodušující pravidla:

1. Pokud jsou naživu už jen dva pistolníci, do vzduchu se nestřílí.
2. Pistolník 2 střílí nejraději na pistolníka 3.
3. Pistolník 3 střílí nejraději na pistolníka 2.

Dokažte, že chování dle těchto pravidel je pro pistolníky racionální.

Hlasovací hry

Úloha 13: Výpočet indexů síly. [5 bodů]
Uvažujme hlasovací hru, které se účastní 5 politických stran. Jednotlivé politické strany disponují počty hlasů $a_1, a_2, a_3, 46$ a 75. Uvažujte hlasovací pravidlo α. Počty hlasů si personalizujte podle data narození, přičemž

- $a_1 = R + 15$, kde za R dosaďte poslední dvojčíslí roku narození,
- $a_2 = 20 + 6M$, kde za M dosaďte pořadové číslo měsíce narození v roce,
- $a_3 = 3D$, kde za D dosaďte den narození v měsíci, a
- $\alpha = 0,48 + D/300$, kde za D dosaďte opět den narození v měsíci.

Spočítejte pro jednotlivé strany hodnoty Shapley-Shubikova indexu síly a Banzhafova indexu síly.

Úloha 14: Indexy síly v závislosti na hlasovacím pravidle. [6 bodů]
Uvažuje hlasovací hru se 6 hráči a počty hlasů $82, 64, 83, 42, 57, 77$. Dokažte, že pro všechna iracionální hlasovací pravidla α platí, že vektor Banzhafových indexů síly pro hlasovací pravidla α i $1-\alpha$ je stejný.

Obecněji, rozhodněte, co musí splňovat počty hlasů a hlasovací pravidlo α v hlasovací hře, aby vektor Banzhafých indexů síly pro hlasovací pravidlo α byl shodný jako vektor pro hlasovací pravidlo $1-\alpha$.